

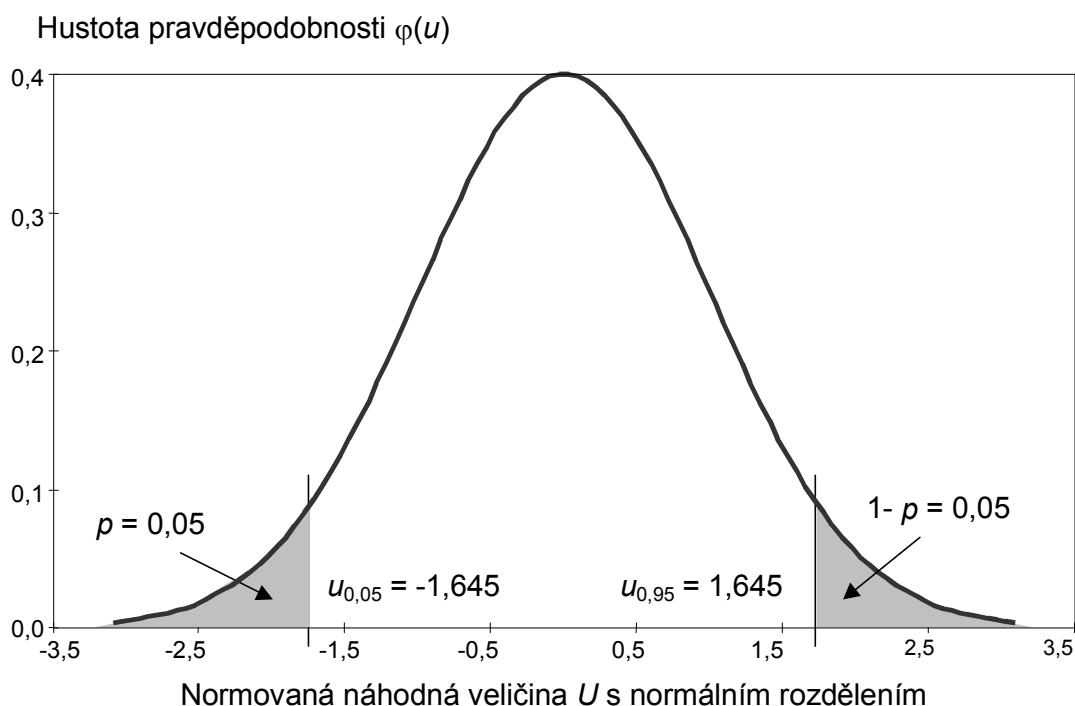
4 KVANTIL NÁHODNÉ VELIČINY

4.1 Kvantil teoretického modelu

Klíčovým pojmem aplikací teorie spolehlivosti ve stavebnictví je kvantil náhodné veličiny. V případě spojité náhodné veličiny X , která má distribuční funkci $\Phi(x)$, je p -kvantil x_p taková hodnota náhodné veličiny X , pro niž platí, že výskyt hodnot menších než x_p nastane pouze s pravděpodobností p , tj. pro niž je distribuční funkce $\Phi(x_p)$ rovna pravděpodobnosti p

$$P(X < x_p) = \Phi(x_p) = p \quad (4.1)$$

Jestliže pravděpodobnost $p < 0,5$, pak se hodnota x_p nazývá dolní kvantil, pro $p > 0,5$ se x_p nazývá horní kvantil. Obrázek 4.1 znázorňuje dolní a horní kvantil u_p normované náhodné veličiny U s normálním rozdělením pro pravděpodobnosti $p = 0,05$ a $0,95$, označené tedy $u_{0,05}$ a $u_{0,95}$.



Obrázek 4.1. Dolní a horní kvantil normované náhodné veličiny U s normálním rozdělením.

Kvantil odpovídající pravděpodobnosti $p = 0,05$ se obvykle uplatňuje při stanovení charakteristické hodnoty materiálových vlastností (pevnosti betonu, meze kluzu oceli,

pevnosti zdiva). Návrhové hodnoty dominantních veličin jsou obvykle kvantily odpovídající menší pravděpodobnosti (např. $p \cong 0,001$), návrhové hodnoty nedominantních veličin jsou kvantily odpovídající naopak větší pravděpodobnosti (např. $p \cong 0,10$).

Pro jednotlivé teoretické modely rozdělení náhodné veličiny X se kvantil zpravidla stanoví na základě tabulek zpracovaných pro normovanou náhodnou veličinu U s příslušným typem rozdělení (viz příloha 2). Takto stanovená hodnota normované náhodné veličiny u_p odpovídající dané pravděpodobnosti p se dosadí do vztahu (3.14) a vypočte se kvantil x_p

$$x_p = \mu + u_p \sigma = \mu (1 + u_p w) \quad (4.2)$$

Tabulka 4.1 uvádí hodnoty u_p dolního kvantilu normované náhodné veličiny U s normálním rozdělením pro vybrané pravděpodobnosti p . Vzhledem k symetrii normálního rozdělení se hodnoty horního kvantilu u_p stanoví z tabulky 4.1 tak, že se p nahradí hodnotou $1-p$ a u hodnot u_p se změní znaménko (ze záporného na kladné). Podrobné tabulky lze najít např. ve skriptech [5,6], v normě ISO 12491 [3] a odborné literatuře [18,19,20].

Tabulka 4.1. Kvantil u_p normované náhodné veličiny s normálním rozdělením.

p	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	0,001	0,010	0,050	0,100	0,200	0,500
u_p	-5,199	-4,753	-4,265	-3,719	-3,091	-2,327	-1,645	-1,282	-0,841	0,000

Pro normovanou náhodnou veličinu s obecným tříparametrickým lognormálním rozdělením je hodnota normované náhodné veličiny u_p závislá na šikmosti α . Tabulka 4.2 uvádí hodnoty u_p pro vybrané šikmosti α a pravděpodobnosti p .

Tabulka 4.2. Kvantil u_p normované náhodné veličiny s lognormálním rozdělením.

α	Pravděpodobnosti p												
	10^{-4}	10^{-3}	0,01	0,05	0,10	0,20	0,50	0,80	0,90	0,95	0,99	$1-10^{-3}$	$1-10^{-4}$
-2,0	-9,52	-6,24	-3,52	-1,89	-1,24	-0,61	0,24	0,77	0,97	1,89	1,28	1,42	1,49
-1,5	-7,97	-5,51	-3,31	-1,89	-1,29	-0,68	0,20	0,81	1,04	1,21	1,45	1,65	1,77
-1,0	-6,40	-4,70	-3,03	-1,85	-1,32	-0,74	0,15	0,84	1,13	1,34	1,68	1,99	2,19
-0,5	-4,94	-3,86	-2,70	-1,77	-1,32	-0,80	0,08	0,85	1,21	1,49	1,98	2,46	2,81
0,0	-3,72	-3,09	-2,33	-1,65	-1,28	-0,84	0,00	0,84	1,28	1,65	2,33	3,09	3,72
0,5	-2,81	-2,46	-1,98	-1,49	-1,21	-0,85	-0,08	0,80	1,32	1,77	2,70	3,86	4,94
1,0	-2,19	-1,99	-1,68	-1,34	-1,13	-0,84	-0,15	0,74	1,32	1,85	3,03	4,70	6,40
1,5	-1,77	-1,65	-1,45	-1,21	-1,04	-0,81	-0,20	0,68	1,29	1,89	3,31	5,51	7,97
2,0	-1,49	-1,42	-1,28	-1,89	-0,97	-0,77	-0,24	0,61	1,24	1,89	3,52	6,24	9,52

Pro lognormálního rozdělení s dolní mezí v nule, které je popsáno v oddílu 3.4, je

možno kvantil stanovit z hodnoty kvantilu normované náhodné veličiny s normálním rozdělením podle vztahu (viz příloha 2)

$$x_p = \frac{\mu}{\sqrt{1+w^2}} \exp\left(u_p \sqrt{\ln(1+w^2)}\right) \quad (4.3)$$

kde u_p je kvantil normované náhodné veličiny s normálním rozdělením, μ je průměr a w variační koeficient veličiny X . Často se uplatňuje aproximace vztahu (4.3) ve tvaru

$$x_p \cong \mu \exp(u_p \times w) \quad (4.4)$$

jejíž přesnost je zcela vyhovující pro $w < 0,2$, běžně se však používá i pro větší w .

Příklad 4.1. Stanovme kvantil normálního a lognormálního rozdělení s dolní mezí v nule pro $p = 0,001; 0,01; 0,05$ a $0,10$, je-li $w = 0,3$. Víme, že lognormální rozdělení s dolní mezí v nule má v tomto případě kladnou šikmost $\alpha = 0,927$ (podle rovnice (3.20)), kterou je třeba znát pro interpolaci v tabulce 4.2. Výsledné hodnoty x_p jsou uvedeny v následující tabulce ve tvaru bezrozměrných součinitelů x_p/μ (vyjadřující podíl kvantilu a průměru) stanovených různým způsobem pro normální i lognormální rozdělení.

Tabulka součinitelů x_p/μ k příkladu 4.1.

Součinitel x_p/μ stanoven pro	Pravděpodobnosti p			
	0,001	0,010	0,050	0,100
normální rozdělení podle rovnice (4.2) a tabulky 4.1	0,073	0,302	0,506	0,615
lognormální rozdělení podle rovnice (4.2) a tabulky 4.2	0,385	0,483	0,591	0,658
lognormální rozdělení podle rovnice (4.3) a tabulky 4.1	0,387	0,484	0,591	0,657
lognormální rozdělení podle rovnice (4.4) a tabulky 4.1	0,396	0,496	0,610	0,681

Z tabulky součinitelů x_p/μ je patrný očekávaný rozdíl mezi kvantilem normálního a lognormálního rozdělení. Zejména pro malé pravděpodobnosti p je dolní kvantil normálního rozdělení výrazně nižší než odpovídající kvantil lognormálního rozdělení. Tabulka rovněž ukazuje, že přibližný vzorec (4.4) poskytuje pro výpočet kvantilu lognormálního rozdělení uspokojivé výsledky (chyba bude menší pro nižší hodnoty variačního koeficientu w).

Kvantil gama rozdělení je možno stanovit z dostupných tabulek pro Pearsonovo rozdělení typu III [5,6]. Pro stanovení kvantilu beta rozdělení lze využít dostupné tabulky neúplné beta funkce nebo kvantil stanovit integrací hustoty pravděpodobnosti podle definice (4.1). Jestliže je to však třeba (a nejsou k dispozici vhodné tabulky nebo softwarový produkt), pak kvantil beta rozdělení, které má zvonovitý tvar (tj. pro parametry tvaru platí $c > 2$ a $d > 2$), lze vypočítat přibližně z rovnice (4.2) na základě tabulkových hodnot u_p pro normované

lognormální rozdělení se stejnou šikmostí α jako má beta rozdělení. Obdobným způsobem je možno postupovat také u jiných typů rozdělení.

Jednoduše lze kvantil x_p stanovit u Gumbelova rozdělení. Z rovnice (3.35) a definice (4.1) vyplývá explicitní vztah pro x_p přímo v závislosti na pravděpodobnosti p

$$x_p = x_{\text{mod}} - \frac{1}{c} \ln(-\ln(p)) \cong \mu - (0,45 + 0,78 \ln(-\ln(p))) \sigma \quad (4.5)$$

kde za modus x_{mod} a parametr c jsou dosazeny vztahy (3.37) a (3.38).

Příklad 4.2. Stanovme horní kvantil tlaku větru z příkladu 3.5 popsaného Gumbelovým rozdělením, jestliže se uvažuje pravděpodobnost $p = 0,98$. Z příkladu 3.5 je známo, že pro jednorocní maxima platí $\mu_1 = 0,35 \text{ kN/m}^2$, $\sigma_1 = 0,06 \text{ kN/m}^2$. Kvantil $x_{0,98}$ pro tyto parametry vyplývá z rovnice (4.5)

$$x_{0,98} = 0,35 - (0,45 + 0,78 \times \ln(-\ln(0,98))) \times 0,06 = 0,51 \text{ kN/m}^2$$

Odpovídající kvantil maxim za dobu 50 let (z příkladu 3.5 víme, že $\mu_{50} = 0,53 \text{ kN/m}^2$, $\sigma_{50} = 0,06 \text{ kN/m}^2$) je

$$x_{0,98} = 0,53 - (0,45 + 0,78 \times \ln(-\ln(0,98))) \times 0,06 = 0,69 \text{ kN/m}^2$$

Snadné matematické postupy včetně výpočtu kvantilu jsou jednou z příčin všeobecné obliby Gumbelova rozdělení při popisu náhodných veličin popisujících klimatická a jiná nahodilá zatížení, která jsou definována maximálními hodnotami ve stanoveném období (např. během jednoho roku).

V praktických aplikacích nejsou však teoretické modely vždy známé. Stavebnictví se velmi často střetává s požadavkem stanovit kvantil náhodné veličiny (např. pevnosti nového nebo neznámého materiálu) na základě omezeného výběru, jehož rozsah n může být velmi malý (někdy menší než 10). Variabilita sledovaných náhodných veličin může být navíc vysoká (variační koeficient je někdy větší než 0,30). Stanovení kvantilu na základě výběru je proto závažný problém, který se v matematické statistice řeší různými metodami teorie odhadu. Uvedeme zde tři základní postupy: pokryvnou, předpovědní a Bayesovskou metodu odhadu kvantilu základního souboru.

4.2 Pokryvná metoda odhadu

Základním pojmem odhadu kvantilu z výběru o rozsahu n pokryvnou metodou je konfidence γ , tj. pravděpodobnost (zpravidla 0,75, 0,90 nebo 0,95), se kterou stanovený

odhad pokrývá hledaný kvantil (proto se mluví o pokrývné metodě, anglicky covering method). Odhad $x_{p,\text{cover}}$ dolního kvantilu x_p je pokrývnou metodou stanoven tak, že platí

$$P(x_{p,\text{cover}} < x_p) = \gamma \quad (4.6)$$

tj, že s pravděpodobností γ je odhad menší (na bezpečné straně) než neznámý kvantil x_p .

V následujícím souhrnu jsou bez odvození uvedeny praktické vzorce za předpokladu, že základní soubor má tříparametrické rozdělení s průměrem μ , směrodatnou odchylkou σ a charakterizované šikmostí α , o které se předpokládá, že je vždy známa z předchozí zkušenosti. Kromě toho se předpokládá, že průměr základního souboru μ není nikdy předem znám a při odhadu se proto vždy vychází z výběrového průměru m , zatímco směrodatná odchylka základního souboru σ je buď známá, a pak se z ní vychází, nebo je neznámá, a pak se místo ní uvažuje výběrová směrodatná odchylka s .

Jestliže směrodatná odchylka σ základního souboru je známá z předchozí zkušenosti, odhad $x_{p,\text{cover}}$ dolního p -kvantilu je dán vztahem

$$x_{p,\text{cover}} = m - \kappa_p \sigma \quad (4.7)$$

Jestliže je směrodatná odchylka základního souboru σ neznámá, uvažuje se výběrová směrodatná odchylka s

$$x_{p,\text{cover}} = m - k_p s \quad (4.8)$$

Koeficienty odhadu $\kappa_p = \kappa(\alpha, p, \gamma, n)$ a $k_p = k(\alpha, p, \gamma, n)$ závisí na typu rozdělení, šikmosti α , na pravděpodobnosti p odpovídající hledanému kvantilu x_p , na konfidenci γ a na rozsahu výběru n (viz dále 4.4). Znalost konfidence γ , že odhad $x_{p,\text{cover}}$ bude na bezpečné straně od skutečné hodnoty x_p , je největší předností klasické pokrývné metody. Konfidence $\gamma = 0,75$ se doporučuje v dokumentech [1, 2]. V náročných případech, kdy se vyžaduje podrobný rozbor spolehlivosti, může být vhodnější vyšší hodnota konfidence, např. 0,95 [14].

4.3 Předpovědní metoda odhadu

Podle předpovědní metody [14] se dolní kvantil x_p odhaduje z výběru rozsahu n tak zvanou předpovědní mezí $x_{p,\text{pred}}$, pro kterou platí, že další hodnota x_{n+1} náhodně vybraná ze základního souboru podkročí odhad $x_{p,\text{pred}}$ pouze s pravděpodobností p , tj. platí

$$P(x_{n+1} < x_{p,\text{pred}}) = p \quad (4.9)$$

Lze ukázat, že takto definovaný odhad $x_{p,\text{pred}}$ se asymptoticky blíží k neznámému kvantilu x_p , jestliže n se zvyšuje. Ukazuje se také, že odhad $x_{p,\text{pred}}$ numericky přibližně odpovídá odhadu pokrývnou metodou $x_{p,\text{cover}}$ stanovenému pro konfidenci $\gamma = 0,75$ [14].

Jestliže veličina X má lognormální rozdělení a směrodatná odchylka základního souboru σ je známá, dolní kvantil je odhadnut hodnotou $x_{p,\text{pred}}$ podle vztahu

$$x_{p,\text{pred}} = m + u_p (1/n + 1)^{1/2} \sigma \quad (4.10)$$

kde $u_p = u(\alpha, p)$ je kvantil normovaného lognormálního rozdělení, které má šikmost α .

Jestliže však směrodatná odchylka základního souboru je neznámá, pak je třeba místo σ uvažovat výběrovou směrodatnou odchylku s

$$x_{p,\text{pred}} = m + t_p (1/n + 1)^{1/2} s \quad (4.11)$$

kde $t_p = t(\alpha, p, \nu)$ je p -kvantil zobecněného Studentova t -rozdělení pro $\nu = n - 1$ stupňů volnosti, které má šikmost α (informace o Studentovu rozdělení a počtu stupňů volnosti je možno získat ze skript [5] a dalších odborných pramenů [18, 19, 20]).

4.4 Součinitele pokravné a předpovědní metody

Pokravná a předpovědní metoda představují dva základní postupy pro odhad kvantilu základního souboru na základě dostupného výběru o omezeném rozsahu n . V případě, že směrodatná odchylka základního souboru σ je známá, aplikují se rovnice (4.7) a (4.10), ve kterých vystupují analogické součinitele κ_p a $-u_p(1/n+1)^{1/2}$. Oba součinitele závisí na typu rozdělení, rozsahu výběru n , součinitel κ_p u pokravné metody ještě na konfidenci γ . Za předpokladu normálního rozdělení základního souboru uvádí tabulka 4.3 součinitele κ_p a $-u_p(1/n+1)^{1/2}$ pro $p = 0,05$ a vybrané hodnoty n a γ .

Tabulka 4.3. Součinitele κ_p a $-u_p(1/n+1)^{1/2}$ z rovnic (4.7) a (4.10) pro $p=0,05$ a normální rozdělení základního souboru (σ známé).

Součinitel		Rozsah souboru n								
		3	4	5	6	8	10	20	30	∞
κ_p	$\gamma = 0,75$	2,03	1,98	1,95	1,92	1,88	1,86	1,79	1,77	1,64
	$\gamma = 0,90$	2,39	2,29	2,22	2,17	2,10	2,05	1,93	1,88	1,64
	$\gamma = 0,95$	2,60	2,47	2,38	2,32	2,23	2,17	2,01	1,95	1,64
$-u_p(1/n+1)^{1/2}$		1,89	1,83	1,80	1,77	1,74	1,72	1,68	1,67	1,64

Z tabulky 4.3 je zřejmé, že se zvyšujícím se rozsahem výběru n se oba součinitele blíží k hodnotě 1,64, která platí pro teoretický model normálního rozdělení (viz tabulka 4.1). U pokravné metody se součinitel κ_p zvětšuje s rostoucí konfidencí γ . Pro konfidenci $\gamma = 0,75$ platí, že $\kappa_p \cong -u_p(1/n+1)^{1/2}$ a pokravná metoda vede přibližně ke stejnému odhadu jako předpovědní metoda, $x_{p,\text{cover}} \cong x_{p,\text{pred}}$ (pro vyšší konfidenci $\gamma > 0,75$ je $x_{p,\text{cover}} < x_{p,\text{pred}}$).

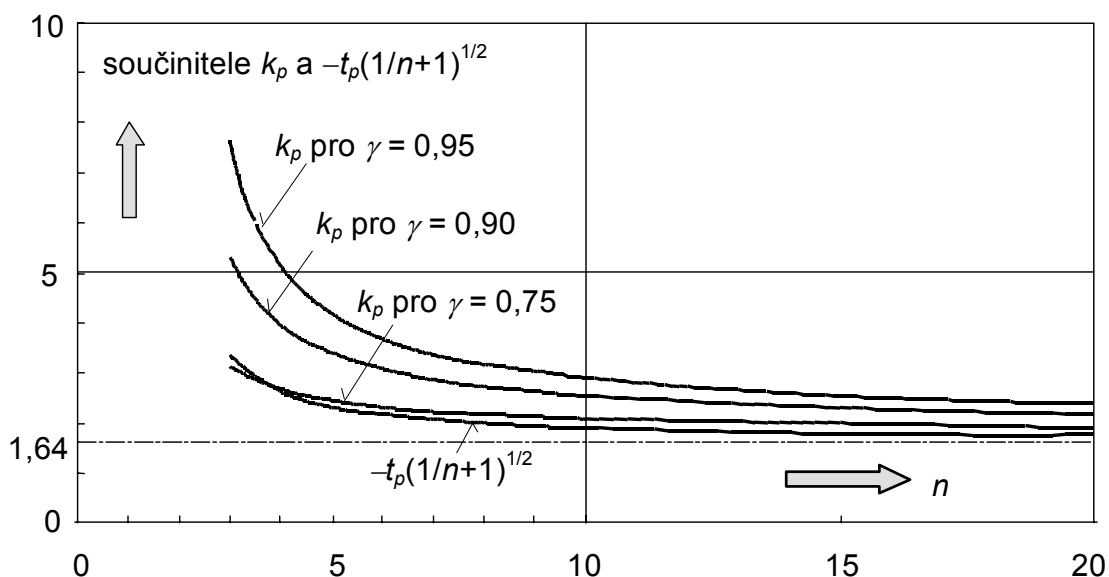
V případě, že směrodatná odchylka základního souboru σ je neznámá, aplikují se

rovnice (4.8) a (4.11), ve kterých vystupují analogické součinitele k_p a $-t_p(1/n+1)^{1/2}$. Oba součinitele závisí opět na typu rozdělení, rozsahu výběru n , součinitel k_p u pokryvné metody ještě na konfidenci γ . Za předpokladu normálního rozdělení zachycuje tabulka 4.4 a obrázek 4.2 hodnoty součinitelů k_p a $-t_p(1/n+1)^{1/2}$ pro $p=0,05$ a vybrané hodnoty n a γ .

Tabulka 4.4. Součinitele k_p a $-t_p(1/n+1)$ z rovnic (4.8) a (4.11) pro $p=0,05$ a normální rozdělení základního souboru (σ neznámé).

Součinitel		Rozsah souboru n								
		3	4	5	6	8	10	20	30	∞
k_p	$\gamma = 0,75$	3,15	2,68	2,46	2,34	2,19	2,10	1,93	1,87	1,64
	$\gamma = 0,90$	5,31	3,96	3,40	3,09	2,75	2,57	2,21	2,08	1,64
	$\gamma = 0,95$	7,66	5,14	4,20	3,71	3,19	2,91	2,40	2,22	1,64
$-t_p(1/n+1)^{1/2}$		3,37	2,63	2,33	2,18	2,00	1,92	1,76	1,73	1,64

Z tabulky 4.4 a z obrázku 4.2 je zřejmé, že s rostoucím rozsahem výběru n se oba součinitele blíží k hodnotě 1,64, která platí pro teoretický kvantil normálního rozdělení (viz tabulka 4.1). U pokryvné metody se součinitel k_p zvětšuje s rostoucí konfidencí γ a příslušné odhady $x_{p,cover}$ dolního kvantilu jsou nižší (na straně bezpečnosti). Pro konfidenci $\gamma = 0,75$ opět platí, že $k_p \cong -t_p(1/n+1)^{1/2}$ a pokryvná metoda vede přibližně ke stejnému odhadu jako předpovědní metoda, $x_{p,cover} \cong x_{p,pred}$ stejně jako v případě známé směrodatné odchylky σ .



Obrázek 4.2. Součinitele k_p a $-t_p(1/n+1)^{1/2}$ pro $p = 0,05$ a normální rozdělení základního souboru (σ neznámé).

Šikmost (asymetrie) základního souboru α může mít rovněž výrazný vliv na odhad

kvantilu základního souboru. Tabulka 4.5 a 4.6 uvádí součinitele k_p z rovnice (4.8) za předpokladu lognormálního rozdělení pro tři šikmosti $\alpha = -1,0, 0,0$ a $1,0$, pro pravděpodobnost $p = 0,05$ a konfidenci $\gamma = 0,75$ (tabulka 4.5) a $\gamma = 0,95$ (tabulka 4.6). Hodnoty součinitelů z tabulky 4.6 jsou znázorněny na obrázku 4.3.

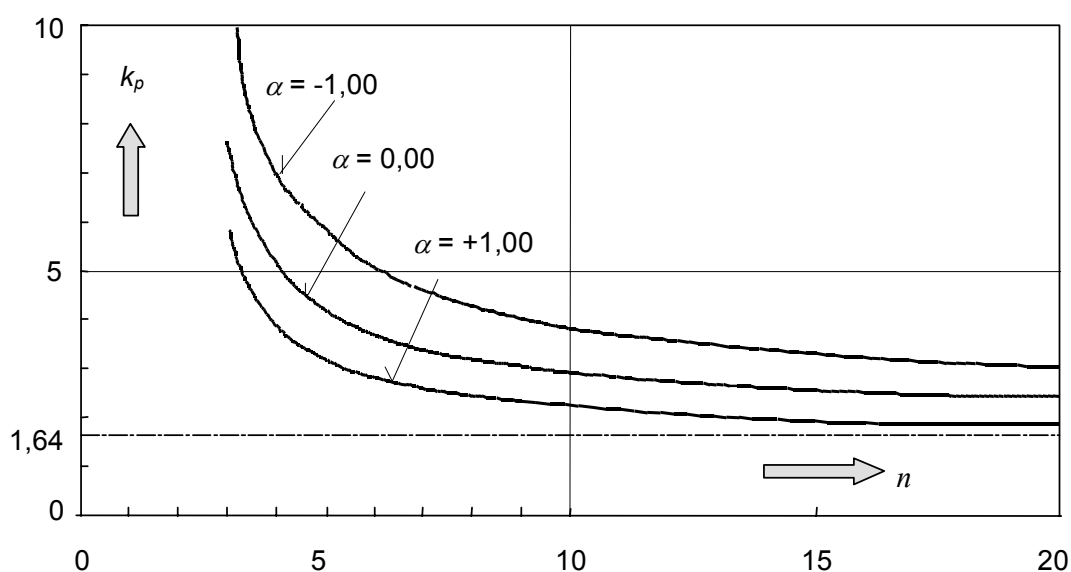
Tabulka 4.5. Součinitel k_p z rovnice (4.8) pro $p = 0,05$, $\gamma = 0,75$ a lognormální rozdělení se šikmostí α (σ neznámé).

Šikmost	Rozsah souboru n								
	3	4	5	6	8	10	20	30	∞
$\alpha = -1,00$	4,31	3,58	3,22	3,00	2,76	2,63	2,33	2,23	1,85
$\alpha = 0,00$	3,15	2,68	2,46	2,34	2,19	2,10	1,93	1,87	1,64
$\alpha = 1,00$	2,46	2,12	1,95	1,86	1,75	1,68	1,56	1,51	1,34

Tabulka 4.6. Součinitel k_p z rovnice (4.8) pro $p = 0,05$, $\gamma = 0,95$ a lognormální rozdělení se šikmostí α (σ neznámé).

Šikmost	Rozsah souboru n								
	3	4	5	6	8	10	20	30	∞
$\alpha = -1,00$	10,9	7,00	5,83	5,03	4,32	3,73	3,05	2,79	1,85
$\alpha = 0,00$	7,66	5,14	4,20	3,71	3,19	2,91	2,40	2,22	1,64
$\alpha = 1,00$	5,88	3,91	3,18	2,82	2,44	2,25	1,88	1,77	1,34

Z tabulky 4.5 a 4.6 je zřejmé, že s rostoucím rozsahem výběru n se součinitele k_p blíží k hodnotám u_p platným pro teoretický model lognormálního rozdělení, které jsou uvedeny v tabulce 4.2. Vliv šikmosti tedy nezmizí ani pro $n \rightarrow \infty$, je však zejména výrazný pro malé soubory a vyšší konfidenci $\gamma = 0,95$ (viz obrázek 4.3).



Obrázek 4.3. Součinitel k_p pro $p = 0,05$ a konfidenci $\gamma = 0,95$ (σ neznámé).

Podobnou závislost na šikmosti lze pozorovat u zobecněného Studentova t -rozdělení, jehož kvantily t_p jsou uvedeny v tabulce 4.7. Tyto hodnoty t_p se uplatní v předpovědní metodě ve vzorci (4.11), a dále v Bayesovské metodě. Proto jsou v tabulce 4.7 uvedeny přímo hodnoty kvantilů t_p v závislosti na počtu stupňů volnosti $\nu = n - 1$. Uvažuje se opět pravděpodobnost $p=0,05$ a tři šikmosti $\alpha = -1,0, 0$ a $1,0$.

Tabulka 4.7 Součinitel $-t_p$ z rovnice (4.11) pro $p = 0,05$ a lognormální rozdělení se šikmostí α (σ neznámé).

Šikmost	Součinitel - t_p pro počet stupňů volnosti $\nu = n - 1$								
	3	4	5	6	8	10	20	30	∞
$\alpha = -1,00$	2,65	2,40	2,27	2,19	2,19	2,04	1,94	1,91	1,85
$\alpha = 0,00$	2,35	2,13	2,02	1,94	1,86	1,81	1,72	1,70	1,64
$\alpha = 1,00$	1,92	1,74	1,64	1,59	1,52	1,48	1,41	1,38	1,34

Z tabulky 4.7 je zřejmé, že se zvyšujícím se rozsahem výběru n se hodnoty t_p blíží k teoretickým hodnotám u_p platným pro model lognormálního rozdělení s odpovídající šikmostí, které jsou uvedeny v tabulce 4.2. Vliv šikmosti tedy opět (stejně jako u součinitele k_p) nezmizí ani pro $n \rightarrow \infty$, je však zejména výrazný pro malé soubory (vzrůstá s klesajícím rozsahem výběru n).

Příklad 4.3. Výběr o rozsahu $n = 5$ měření pevnosti betonu má průměr $m = 29,2$ MPa a směrodatnou odchylku $s = 4,6$ MPa. Předpokládáme, že základní soubor je normální a že jeho směrodatná odchylka σ je neznámá. Charakteristická pevnost $f_{ck} = x_p$, kde $p = 0,05$ je nejdříve stanovena pokryvnou metodou. Jestliže konfidence je $\gamma = 0,75$, vyplývá z rovnice (4.8) a tabulky 4.4

$$x_{p,cover} = 29,2 - 2,46 \times 4,6 = 17,9 \text{ MPa}$$

Jestliže se však vyžaduje vyšší konfidence $\gamma = 0,95$, pak

$$x_{p,cover} = 29,2 - 4,20 \times 4,6 = 9,9 \text{ MPa}$$

Při předpovědní metodě se zjistí z rovnice (4.11) a tabulky 4.4

$$x_{p,pred} = 29,2 - 2,33 \times 4,6 = 18,5 \text{ MPa}$$

Podle předpovědní metody je tedy charakteristická pevnost pouze nepatrně větší než podle pokryvné metody s konfidencí $\gamma = 0,75$. Jestliže by se však požadovala vyšší konfidence $\gamma = 0,95$, pak pokryvná metoda vede k hodnotě, která je téměř poloviční než hodnota podle předpovědní metody.

Jestliže výběr pochází ze základního souboru s lognormálním rozdělením a kladnou

šikmostí $\alpha = 1$, pak pokryvná metoda s konfidencí $\gamma = 0,75$ (tabulka 4.5) poskytuje odhad

$$x_{p,\text{cover}} = 29,2 - 1,95 \times 4,6 = 20,2 \text{ MPa}$$

což je hodnota o 13 % vyšší než při nulové šikmosti.

Podobně pro předpovědní metodu z rovnice (4.11) a tabulky 4.7 plyne

$$x_{p,\text{pred}} = 29,2 - 1,74 \times \sqrt{\frac{1}{5} + 1} \times 4,6 = 20,4 \text{ MPa}$$

kde hodnota $t_p = -1,74$ je uvedena v tabulce 4.7 pro $\alpha = 1,0$ a $\nu = 5 - 1 = 4$. Výsledná pevnost je v tomto případě o 10% vyšší než hodnota odpovídající normálnímu rozdělení ($\alpha = 0$).

4.5 Bayesovská metoda odhadu

Jestliže jsou u některé náhodné veličiny k dispozici předchozí zkušenosti (např. v případě ustálené výroby), je možno využít tak zvaný Bayesovský postup, který obecně sleduje myšlenku aktualizace pravděpodobností popsanou v oddílu 2.5. Bayesovský postup odhadu kvantilu je popsán bez odvození příslušných důležitých vztahů. Podrobnější informace jsou uvedeny v dokumentech ISO [2,3] a další odborné literatuře [18,19,20].

Předpokládejme, že je k dispozici výběr o rozsahu n , který má průměr m a směrodatnou odchylku s . Kromě toho je z předchozí zkušenosti znám výběrový průměr m' a výběrová směrodatná odchylka s' , které byly stanoveny z neznámého výběru o neznámém rozsahu n' . Předpokládá se ovšem, že oba výběry pocházejí ze stejného základního souboru, který má průměr μ a směrodatnou odchylku σ . Oba soubory je tedy možno sloučit. Jestliže by byly známy jednotlivé hodnoty předchozího souboru, bylo by toto sloučení jednoduché. To však není v tomto případě možné. Je proto nutno využít Bayesovské úvahy.

Parametry sloučeného souboru obecně jsou dány vztahy [2,3]

$$\begin{aligned} n'' &= n + n' \\ \nu'' &= \nu + \nu' - 1 \text{ je-li } n' \geq 1, \nu'' = \nu + \nu' \text{ je-li } n' = 0 \\ m'' &= (mn + m'n') / n'' \\ s''^2 &= (\nu s^2 + \nu' s'^2 + n m^2 + n' m'^2 - n'' m''^2) / \nu'' \end{aligned} \quad (4.12)$$

Neznámé hodnoty n' a ν' mohou být nyní stanoveny na základě vztahů pro variační koeficienty průměru a směrodatné odchylky $v(\mu)$ a $v(\sigma)$ (parametry μ a σ se v Bayesovském pojetí považují za náhodné veličiny), pro které platí [2,3]

$$n' = [s' / (m' v(\mu))]^2, \nu' = 1 / (2 v(\sigma)^2) \quad (4.13)$$

Obě neznámé veličiny n' a v' mohou být stanoveny nezávisle na sobě (obecně $v' \neq n'-1$), avšak v závislosti na předchozí zkušenosti o stupni nejistoty odhadu průměru μ a směrodatné odchylky σ základního souboru.

Další krok postupu navazuje na předpovědní metodu. Bayesovský odhad $x_{p, \text{Bayes}}$ kvantilu je dán vztahem analogickým k rovnici (4.11) pro předpovědní odhad za předpokladu, že směrodatná odchylka σ základního souboru není známa

$$x_{p, \text{Bayes}} = m'' + t_p'' (1/n'' + 1)^{1/2} s'' \quad (4.14)$$

kde $t_p'' = t_p''(\alpha, p, v'')$ je p -kvantil zobecněného Studentova t -rozdělení, které má odpovídající šikmost α , pro v'' stupňů volnosti (obecně odlišné od hodnoty $n'' - 1$).

Jestliže se Bayesovský postup aplikuje pro stanovení pevnosti materiálů, s výhodou lze využít skutečnosti, že variabilita je zpravidla dlouhodobě ustálená. Pak nejistota při stanovení σ vyjádřená hodnotou $v(\sigma)$ je poměrně malá, veličina v' stanovená podle rovnice (4.13) a v'' stanovená podle první z rovnic (4.12) jsou velké. Tato okolnost může vést k příznivému snížení hodnoty t_p'' a tím ke zvýšení odhadu hodnoty dolního kvantilu $x_{p, \text{Bayes}}$ podle rovnice (4.14). Často však nejistoty při stanovení průměru μ a tedy hodnota $v(\mu)$ jsou obvykle velké, takže předchozí informace nemusí významně ovlivnit výsledné hodnoty n'' a m'' .

Jestliže nejsou k dispozici žádné předchozí informace, pak $n' = v' = 0$ a výsledné charakteristiky m'' , n'' , s'' , v'' se rovnají výběrovým charakteristikám m , n , s , v . V tomto případě se Bayesovská metoda redukuje na předpovědní metodu a rovnice (4.14) přechází na rovnici (4.11), popř. (jestliže je σ známé) použije se rovnice (4.10). Tento zvláštní případ Bayesovské metody, kdy nejsou k dispozici žádné předchozí informace, se uvažuje v mezinárodních dokumentech CEN [1] a ISO [2, 3].

Příklad 4.4. Jestliže v příkladu 4.3 jsou k dispozici předchozí zkušenosti, lze využít Bayesovskou metodu. Předpokládejme, že tyto informace jsou

$$m' = 30,1 \text{ MPa}, V(\mu) = 0,50, s' = 4,4 \text{ MPa}, V(\sigma) = 0,28 \text{ Z rovnice (4.13) plyne}$$

$$n' = \left(\frac{4,4}{30,1} \frac{1}{0,50} \right)^2 < 1, v' = \frac{1}{2 \times 0,28^2} \approx 6$$

Dále se tedy uvažují hodnoty: $n' = 0$ a $v' = 6$. Protože $v = n - 1 = 4$, z rovnice (4.12) plyne

$n'' = 5$, $v'' = 10$, $m'' = 29,2 \text{ MPa}$, $s'' = 4,5 \text{ MPa}$ Z rovnice (4.14) se zjistí pro normální rozdělení odhad

$$x_{p, \text{Bayes}} = 29,2 - 1,81 \times \sqrt{\frac{1}{5} + 1} \times 4,5 = 20,3 \text{ MPa}$$

kde hodnota $t_p'' = 1,81$ je z tabulky 4.7 pro $\alpha = 0$ a $\nu'' = 10$. Výsledná pevnost je tedy vyšší (o 10 %) než hodnota získaná z předpovědní metody.

Jestliže základní soubor má lognormální rozdělení se šikmostí $\alpha = 1$, pak ze vztahu (4.14) a tabulkové hodnoty $t_p'' = 1,48$ uvedené v tabulce 4.7 vyplývá

$$x_{p, \text{Bayes}} = 29,2 - 1,48 \times \sqrt{\frac{1}{5} + 1} \times 4,5 = 21,9 \text{ MPa}$$

což je hodnota o 8% vyšší než Bayesovský odhad za předpokladu normálního rozdělení (pro šikmost $\alpha = 0$).

Příklady 4.3 a 4.4 zřetelně ukázaly, že odhad charakteristické pevnosti (kvantilu s pravděpodobností $p = 0,05$) na základě jednoho výběru se může pohybovat v širokém rozmezí (v příkladech 4.3 a 4.4 od 9,9 MPa do 21,9 MPa) v závislosti na použité metodě, na požadované konfidenci, na předchozích informacích a na předpokladech o základním souboru. Poznamenejme, že kromě alternativ uvažovaných v příkladech 4.3 a 4.4 se může navíc uplatnit znalost směrodatné odchylky σ základního souboru a předpoklad záporné šikmosti α (např. u některých materiálů s vysokou pevností).

Ještě výraznější rozdíly výsledných hodnot mohou nastat při odhadu návrhových hodnot pevností, tj. odhadu kvantilů, které odpovídají malé pravděpodobnosti (např. $p \cong 0,001$). Přímý odhad takového kvantilu na základě omezeného výběru ze základního souboru se však doporučuje jen v těch případech, kdy je k dispozici dostatek věrohodných údajů o chování příslušné náhodné veličiny. V těchto případech je účelné postupovat obezřetně a pokud možno ve spolupráci se specialisty v oblasti matematické statistiky.

4.6 Odhady kvantilů podle Eurokódů

Eurokód 1 [1] uvádí tabulky součinitelů pro odhad kvantilu náhodné veličiny s normálním rozdělením (nesymetrická rozdělení se tedy neuvažují) na základě výběru pro tři pravděpodobnosti $p = 0,05$ (např. pro charakteristickou hodnotu x_k), $p = 0,001$ (např. pro návrhovou hodnotu x_d dominantní veličiny) a $p = 0,10$ (např. pro návrhovou hodnotu x_d nedominantní veličiny). Jak bylo již uvedeno, charakteristické hodnoty x_k a návrhové hodnoty x_d jsou definovány jako kvantily x_p , které odpovídají dané pravděpodobnosti p (aplikace těchto hodnot při navrhování konstrukcí je vysvětlena v následujících kapitolách).

Pro charakteristickou hodnotu materiálových vlastností se zpravidla uvažuje kvantil

odpovídající pravděpodobnosti $p = 0,05$ (u veličin popisujících nahodilá zatížení je však p zpravidla menší), tj. platí

$$P(X < x_k) = 0,05 \quad (4.15)$$

Pro návrhovou hodnotu x_d dominantní veličiny přibližně vychází $p = 0,001$ (nebo hodnota blízká), tj. platí

$$P(X < x_d) = 0,001 \quad (4.16)$$

Konečně pro návrhovou hodnotu x_d nedominantní veličiny přibližně vychází $p = 0,1$, tj. platí

$$P(X < x_d) = 0,1 \quad (4.17)$$

Popis dominantních a nedominantních veličin je uveden v dalších kapitolách.

Následující tři tabulky, které uvádějí potřebné součinitele pro odhad veličin x_k a x_d podle rovnic (4.15) a (4.16), jsou záměrně převzaty z dokumentu [1] v plném znění (tabulka 4.8 se částečně překrývá s předchozími tabulkami 4.3 a 4.4). Poznamenáme, že všechny součinitele jsou v [1] označeny symbolem k_n , který v těchto tabulkách přebíráme.

Tabulka 4.8. Součinitele k_n pro 5% charakteristickou hodnotu (viz tabulky 4.4 a 4.3).

Součinitel	Rozsah souboru n										
	1	2	3	4	5	6	8	10	20	30	∞
$-u_p(1/n+1)^{1/2}, \sigma$ známé	2,31	2,01	1,89	1,83	1,80	1,77	1,74	1,72	1,68	1,67	1,64
$-t_p(1/n+1)^{1/2}, \sigma$ neznámé	-	-	3,37	2,63	2,33	2,18	2,00	1,92	1,76	1,73	1,64

Tabulka 4.9. Součinitele k_n pro návrhovou hodnotu x_d dominantní veličiny, $P(X < x_d) = 0,001$.

Součinitel	Rozsah souboru n										
	1	2	3	4	5	6	8	10	20	30	∞
$-u_p(1/n+1)^{1/2}, \sigma$ známé	4,36	3,77	3,56	3,44	3,37	3,33	3,27	3,23	3,16	3,13	3,09
$-t_p(1/n+1)^{1/2}, \sigma$ neznámé	-	-	-	11,4	7,85	6,36	5,07	4,51	3,64	3,44	3,09

Tabulka 4.10. Součinitele k_n pro návrhovou hodnotu x_d nedominantní veličiny, $P(X < x_d) = 0,1$.

Součinitel	Rozsah souboru n										
	1	2	3	4	5	6	8	10	20	30	∞
$-u_p(1/n+1)^{1/2}, \sigma$ známé	1,81	1,57	1,48	1,43	1,40	1,38	1,36	1,34	1,31	1,30	1,28
$-t_p(1/n+1)^{1/2}, \sigma$ neznámé	-	3,77	2,18	1,83	1,68	1,56	1,51	1,45	1,36	1,33	1,28

V dokumentu [1] se předpoklad o znalosti směrodatné odchylky nahrazuje (nepřesně) předpokladem o znalosti variačního koeficientu w . V originálu [1] tabulky 4.9 je pro rozsahu souboru $n = \infty$ chybně uvedena hodnota součinitele 3,08 (má být 3,09). Všimněme si také, že pro předpoklad známé směrodatné odchylky jsou v tabulkách 4.8 až 4.10 uvedeny hodnoty součinitelů již pro rozsah souboru $n = 1$. Využití těchto hodnot je však spojeno se značnými statistickými nejistotami a doporučuje se proto minimální rozsah výběru $n = 3$.