Kvantil náhodné veličiny

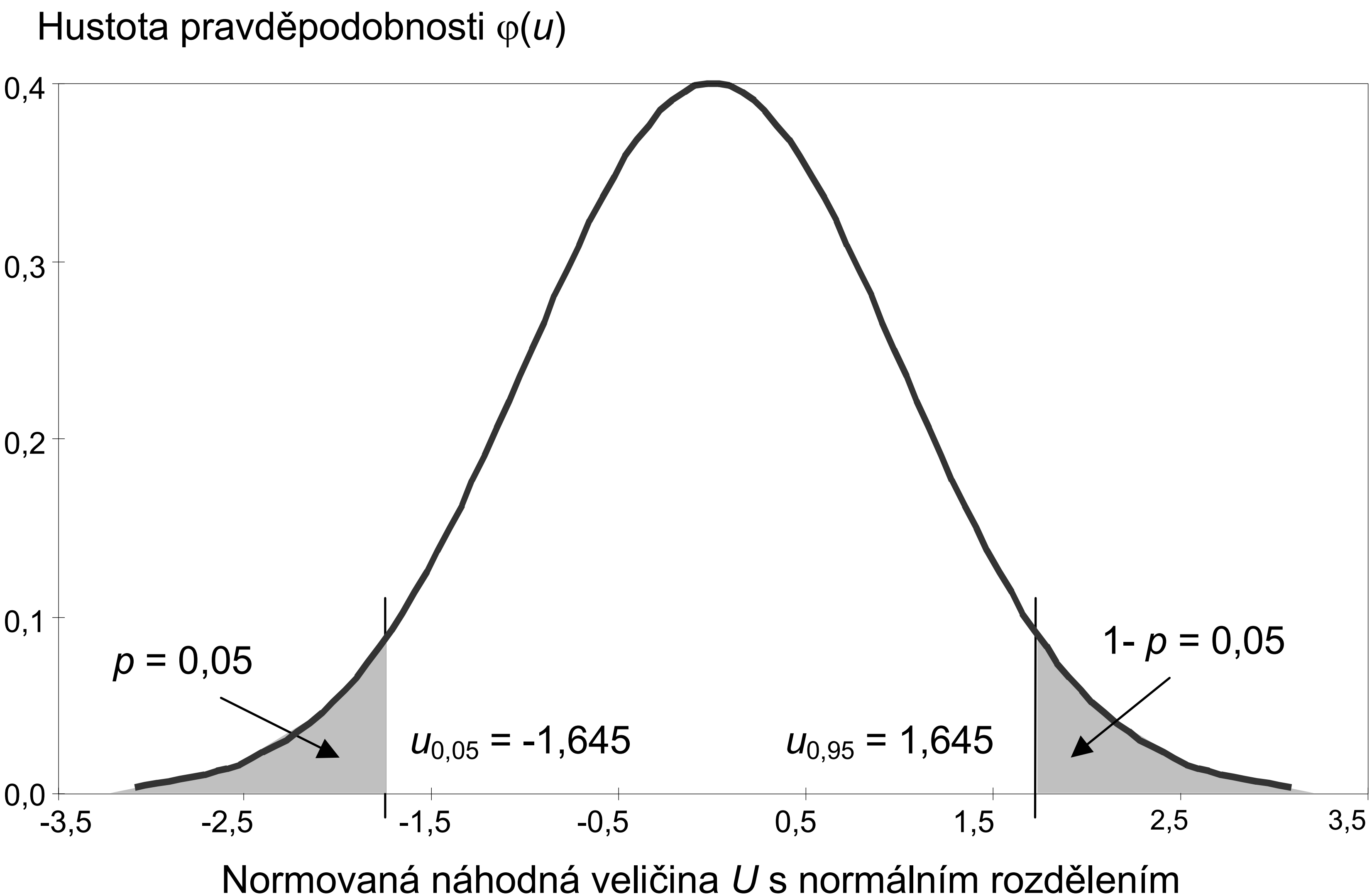
TEORETICKÝ MODEL: $\varphi(x)$, $\Phi(x)$, μ, σ, α

Kvantil x_p je hodnota náhodné veličiny X, která splňuje podmínku

$$\mathrm{P}(X < x_p) = p$$

$$p = \int_{-\infty}^{x_p} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(x_p)$$

Kvantil teoretického modelu



Kvantil normované náhodné veličiny

$$x_p = \mu + u_p\,\sigma = \mu\,(1 + u_p\,w)$$

Kvantil u_p normované náhodné veličiny s normálním rozdělením.

p	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	0,001	0,010	0,050	0,100	0,200	0,500
u_p	-5,199	-4,753	-4,265	-3,719	-3,091	-2,327	-1,645	-1,282	-0,841	0,000

Kvantil u_p normované náhodné veličiny s lognormální rozdělení.

	Pravděpodobnosti p												
α	10^{-4}	10^{-3}	0,01	0,05	0,10	0,20	0,50	0,80	0,90	0,95	0,99	$1\text{-}10^{-3}$	$1\text{-}10^{-4}$
-1,0	-6,40	-4,70	-3,03	-1,85	-1,32	-0,74	0,15	0,84	1,13	1,34	1,68	1,99	2,19
0,0	-3,72	-3,09	-2,33	-1,65	-1,28	-0,84	0,00	0,84	1,28	1,65	2,33	3,09	3,72
1,0	-2,19	-1,99	-1,68	-1,34	-1,13	-0,84	-0,15	0.74	1,32	1,85	3,03	4,70	6,40

Kvantil lognormálního rozdělení

$$x_p = \frac{\mu}{\sqrt{1+w^2}} \exp\left(u_p \sqrt{\ln(1+w^2)} \right)$$

$$x_p \cong \mu \exp\left(u_p \times w \right)$$

Kvantil gumbelova rozdělení

$$x_p = x_{\mathrm{mod}} - \frac{1}{c} \ln(-\ln(p)) \cong \mu - (0{,}45 + 0{,}78 \ln(-\ln(p)))\,\sigma$$

Odhad kvantilu ze souboru

SOUBOR: *n*, *m*, *s*, (σ)

POKRYVNÁ METODA - konfidence γ

$$\mathrm{P}(x_{p,\mathrm{cover}} < x_p) = \gamma$$

$$x_{p,\mathrm{cover}} = m - \kappa_p \, \sigma$$

$$x_{p,\mathrm{cover}} = m - k_p \, s$$

Odhad kvantilu ze souboru

SOUBOR: *n*, *m*, *s*, (σ)

PŘEDPOVĚDNÍ METODA

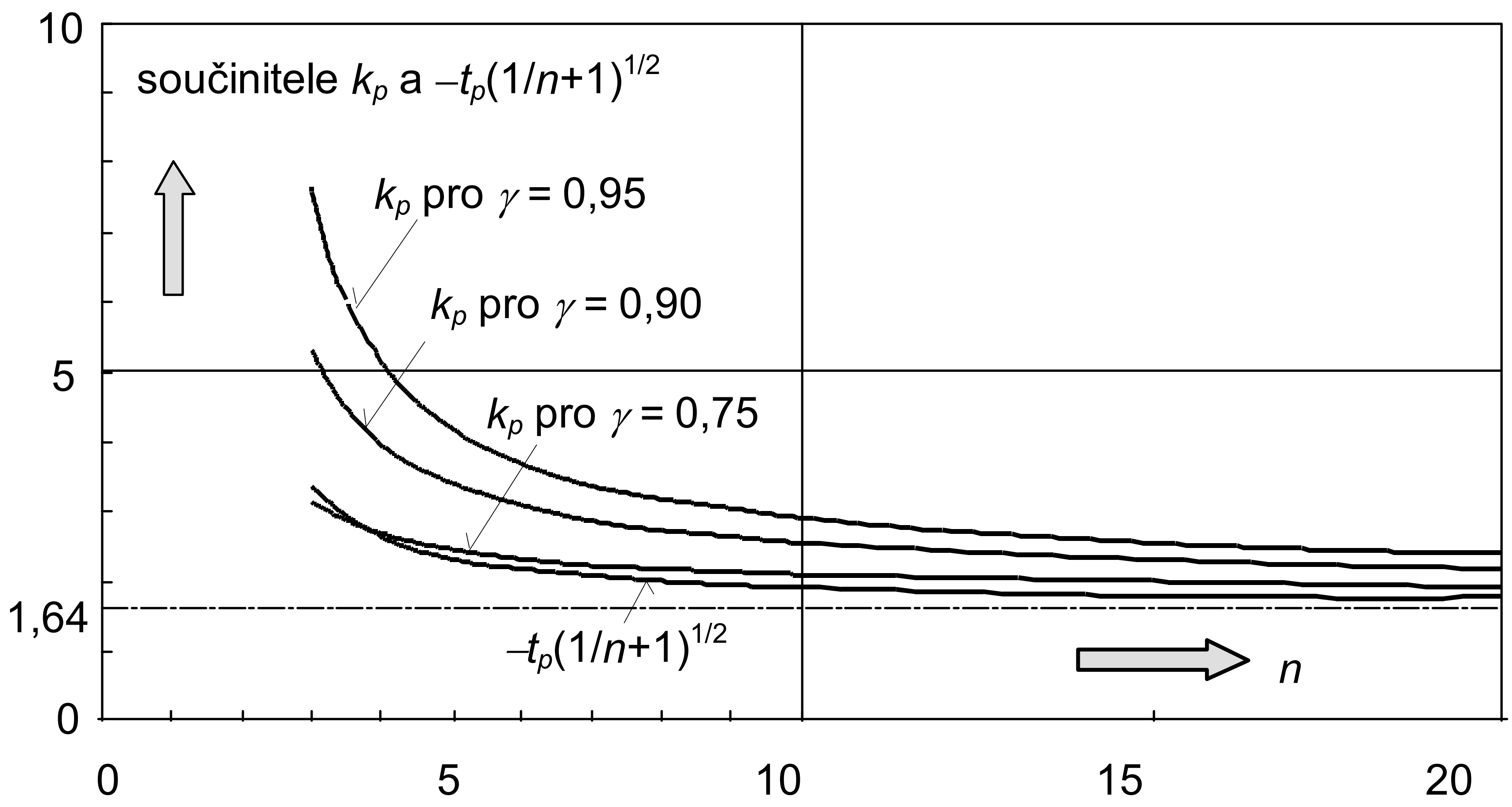
$$\mathrm{P}(x_{n+1} < x_{p,\,\mathrm{pred}}) = p$$

$$x_{p,\mathrm{pred}} = m + u_p\,(1/n + 1)^{1/2}\,\sigma$$

$$x_{p,\mathrm{pred}} = m + t_p\,(1/n + 1)^{1/2}\,s$$

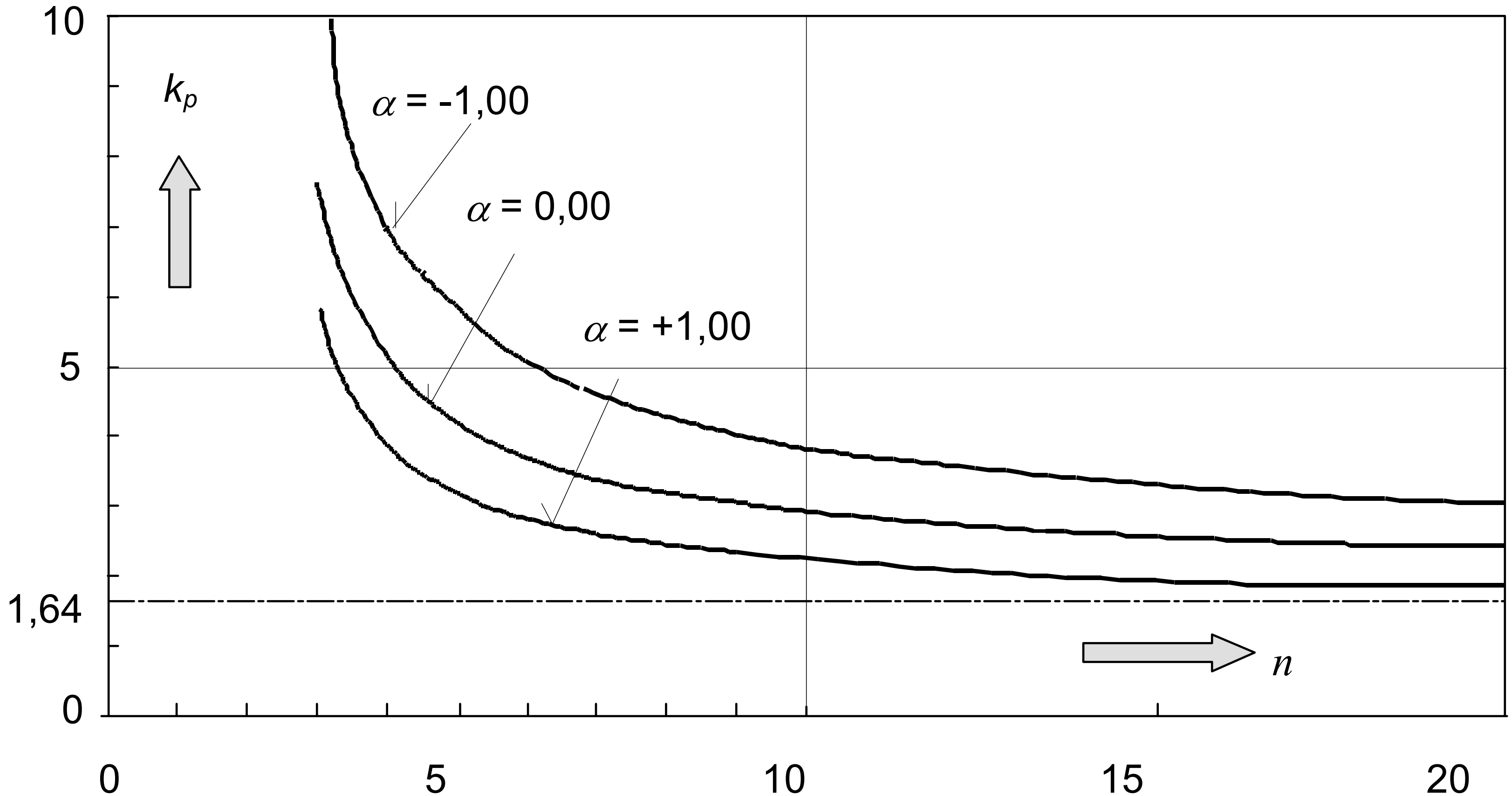
Součinitele k_p a $-t_p(1/n+1)^{1/2}$

Pro normální rozdělení a různé konfidence γ



Součinitele k_p

pro lognormální rozdělení a různé šikmosti α



Příklad odhadu kvantilu

BETON: $n = 5$, $m = 29{,}2$ MPa, $s = 4{,}6$ MPa

Pokryvná metoda

Pro $\gamma = 0{,}75$: $$x_{p,\mathrm{cover}} = 29{,}2 - 2{,}46 \times 4{,}6 = 17{,}9 \text{ MPa}$$

Pro $\gamma = 0{,}95$: $$x_{p,\mathrm{cover}} = 29{,}2 - 4{,}20 \times 4{,}6 = 9{,}9 \text{ MPa}$$

Předpovědní metoda

$$x_{p,\mathrm{pred}} = 29{,}2 - 2{,}33 \times 4{,}6 = 18{,}5 \text{ MPa}$$

Bayesovská metoda odhadu kvantilů

Zjištěné informace: *m, s, n, ν*

Apriorní informace: *m', s', $V(\mu)$, $V(\sigma)$, (n', ν')*

Aktualizované informace: *m'', s'', n'', ν''*

$$n'' = n + n'$$

$$\nu'' = \nu + \nu' - 1 \text{ je-li } n' \geq 1, \quad \nu'' = \nu + \nu' \text{ je-li } n' = 0$$

$$m'' = (mn + m'n') / n''$$

$$s''^2 = (\nu s^2 + \nu' s'^2 + n\, m^2 + n'\, m'^2 - n''\, m''^2) / \nu''$$

$$n' = [s' / (m'\, V(\mu))]^2, \quad \nu' = 1 / (2\, V(\sigma)^2)$$

$$x_{p,\mathrm{Bayes}} = m'' + t''_p \, (1/n'' + 1)^{1/2} s''$$

Příklad bayesovské metody

BETON: $n = 5$, $m = 29{,}2$ MPa, $s = 4{,}6$ MPa

$m' = 30{,}1$ MPa, $V(\mu) = 0{,}50$, $s' = 4{,}4$ MPa, $V(\sigma) = 0{,}28$

$$n' = \left(\frac{4{,}4}{30{,}1}\frac{1}{0{,}50}\right)^2 < 1\ ,\ \nu' = \frac{1}{2\times 0{,}28^2} \approx 6$$

$$n'' = 5,\ \nu'' = 10,\ m'' = 29{,}2\ \text{MPa},\ s'' = 4{,}5\ \text{MPa}$$

$$x_{p,\text{Bayes}} = 29{,}2 - 1{,}81\times\sqrt{\frac{1}{5}+1}\times 4{,}5 = 20{,}3\ \text{MPa}$$

Odhad kvantilů podle eurokódů

Součinitele k_n pro 5% charakteristickou hodnotu .

Součinitel	Rozsah souboru n 1	2	3	4	5	6	8	10	20	30	∞
$- u_p(1/n+1)^{1/2}$, σ známé	2,31	2,01	1,89	1,83	1,80	1,77	1,74	1,72	1,68	1,67	1,64
$- t_p(1/n+1)^{1/2}$, σ neznámé	-	-	3,37	2,63	2,33	2,18	2,00	1,92	1,76	1,73	1,64

. Součinitele k_n pro návrhovou hodnotu x_d dominantní veličiny, $P(X < x_\mathrm{d}) = 0{,}001$.

Součinitel	Rozsah souboru n 1	2	3	4	5	6	8	10	20	30	∞
$- u_p(1/n+1)^{1/2}$, σ známé	4,36	3,77	3,56	3,44	3,37	3,33	3,27	3,23	3,16	3,13	3,09
$- t_p(1/n+1)^{1/2}$, σ neznámé	-	-	-	11,4	7,85	6,36	5,07	4,51	3,64	3,44	3,09