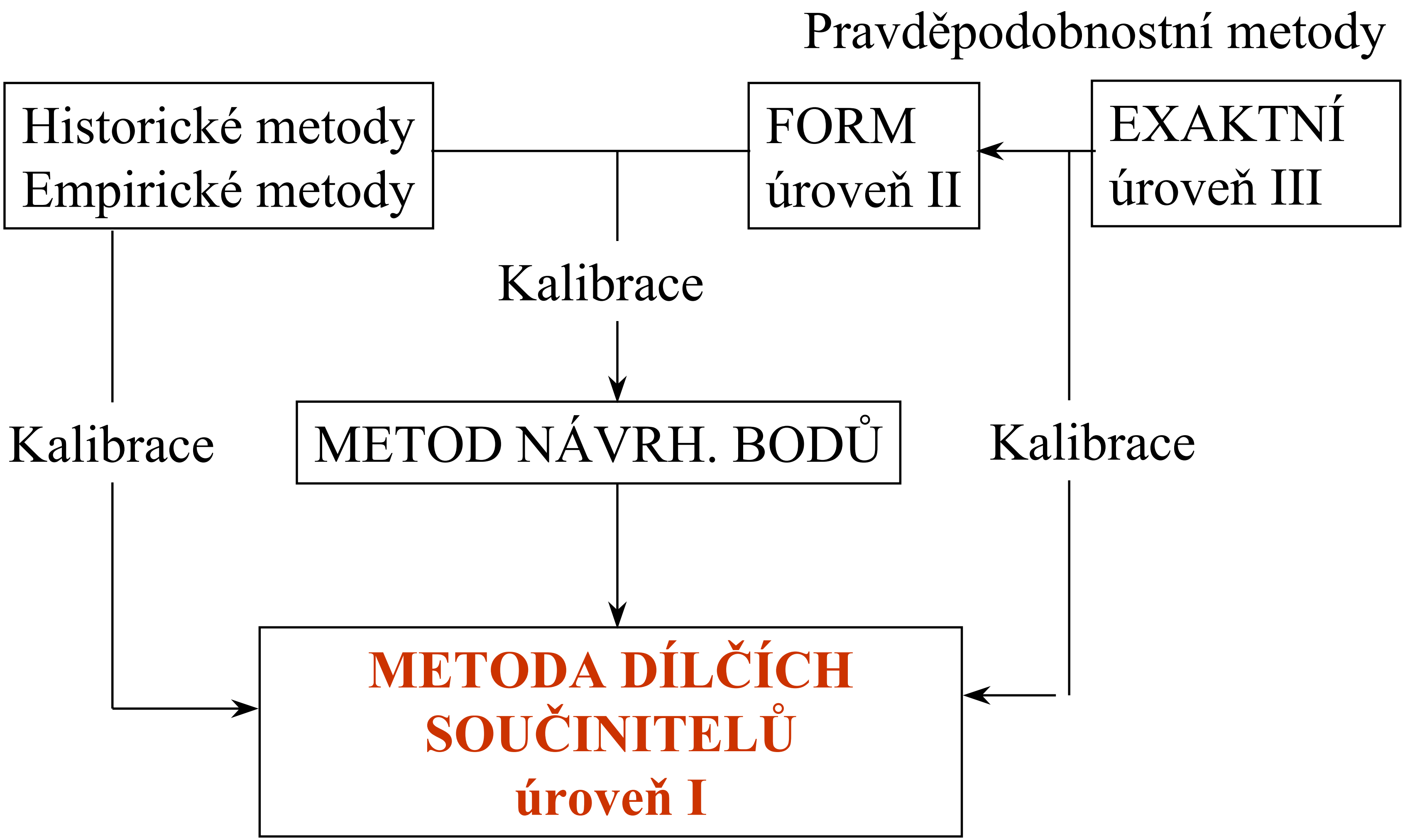
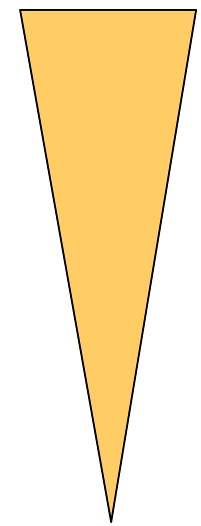
Metody teorie spolehlivosti



Nejistoty stavebních systémů

- **Nejistoty** **Možnost popisu**

  - Náhodnosti - přirozená proměnlivost
  - Statistické nejistoty - nedostatek dat
  - Modelové nejistoty
  - Neurčitosti - nepřesnosti definic
  - Hrubé chyby - lidský činitel
  - Neznalosti - nové materiály a podmínky

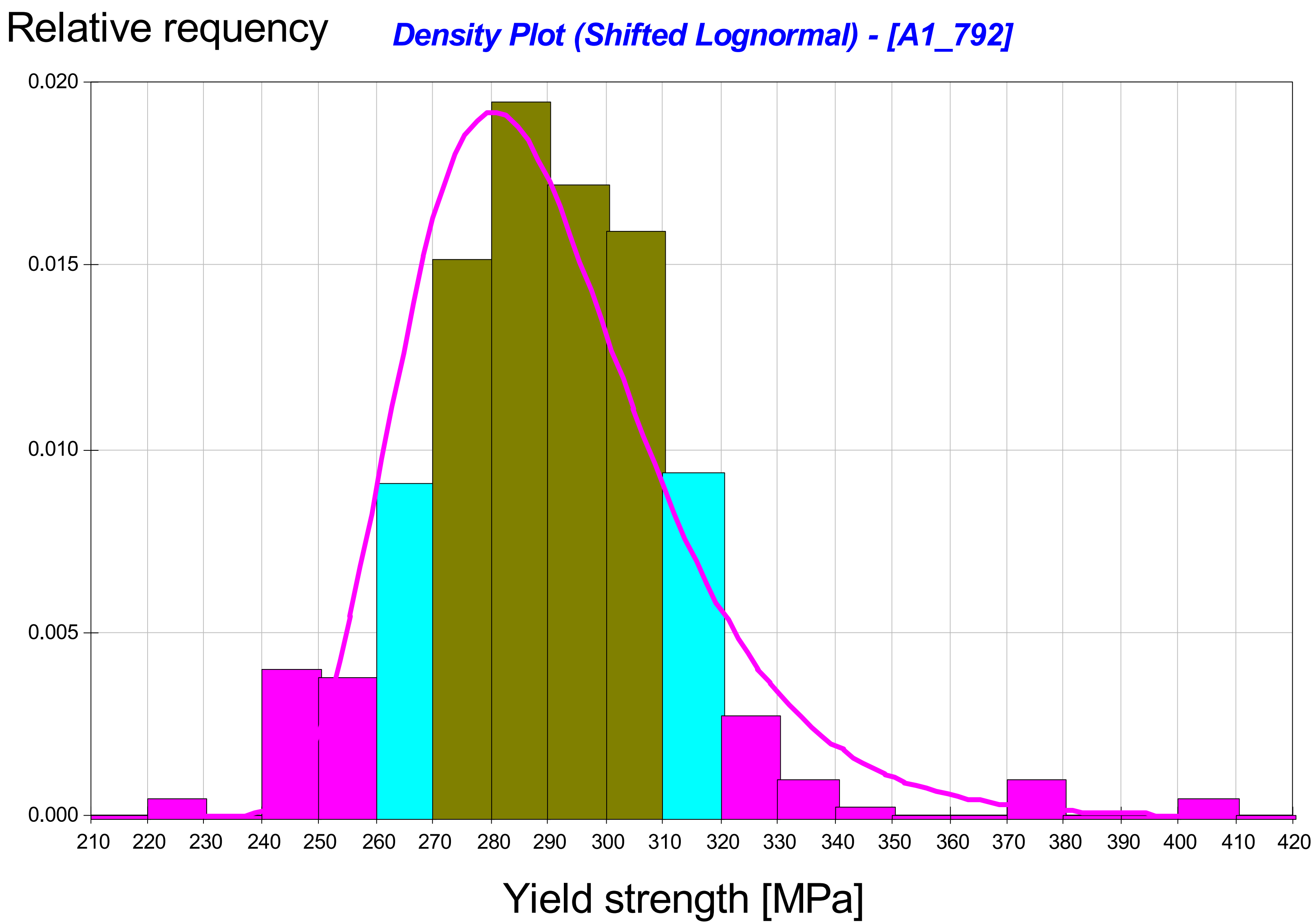


- **Nástroje**

  - teorie pravděpodobnosti a fuzzy množin
  - matematická statistika

Některé nejistoty je obtížné kvantifikovat

MEZ PRŮTAŽNOSTI



Pravděpodobnostní metoda-úroveň III

- **Zatížení - náhodné veličiny *F***
- **Vlastnosti materiálů - náhodné veličiny *f***
- **Rozměry - náhodné veličiny *a***

$$P_{\mathrm{f}} < P_{\mathrm{f,t}}\,;\ \beta > \beta_{\mathrm{t}} \qquad \beta = -\Phi_{\mathrm{N}}^{-1}(P_{\mathrm{f}})$$

- **Nedostatky**

  - nedostatek representativních dat umožňujících definice příslušných teoretických modelů

Pravděpodobnost poruchy

Základní veličiny: $\boldsymbol{X}$ zatížení, vlastnosti materiálů, rozměry

Funkce mezního stavu: **g(X), g(X) < 0 porucha,**
g(X) > 0 příznivý stav

Pravděpodobnost poruchy P_{f} a spolehlivost P_{s}

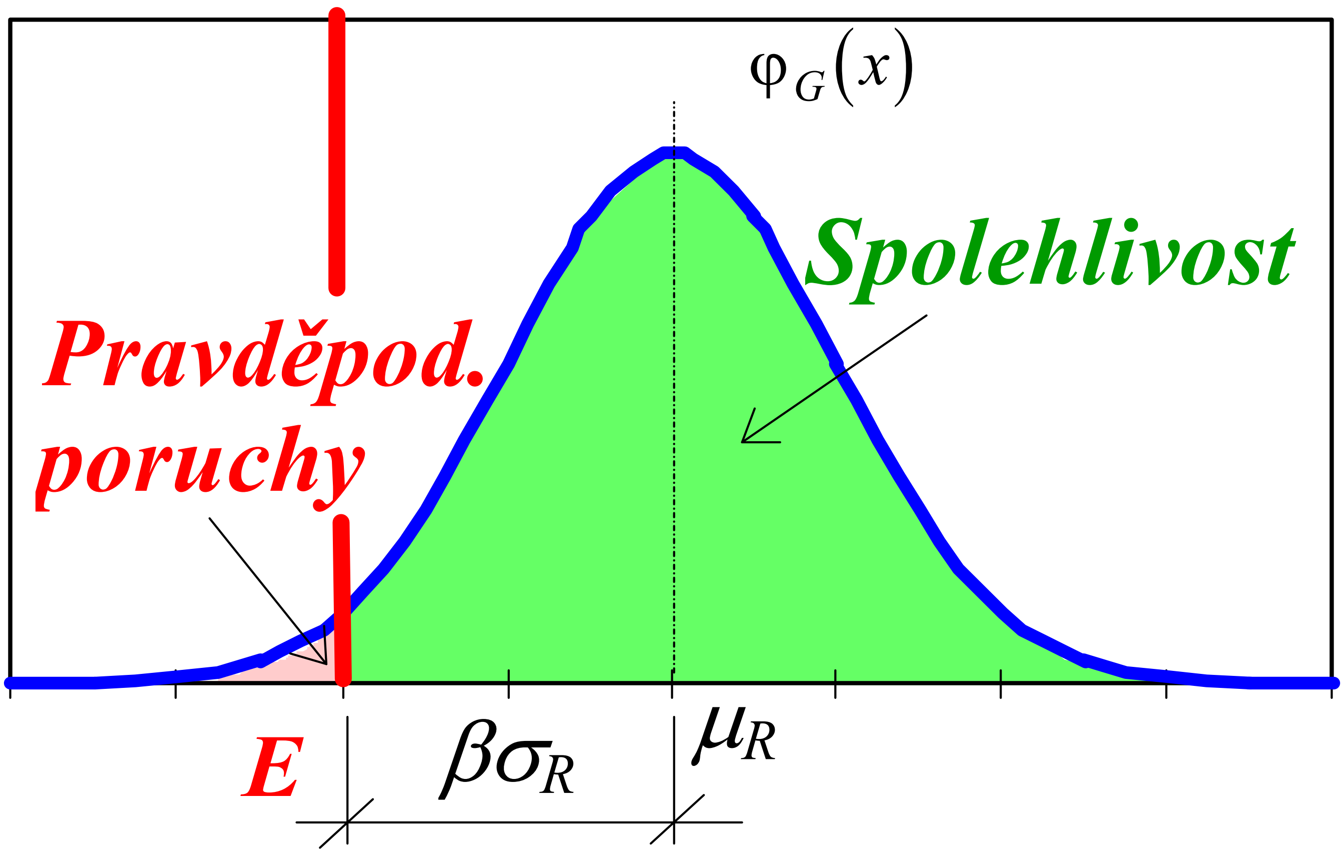
$$P_{\mathrm{f}} = 1 - P_{\mathrm{s}} = \mathrm{Prob}\{g(\boldsymbol{X}) < 0\} = \int_{\mathrm{g}(\boldsymbol{X})<0} \varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X})\,\mathrm{d}\boldsymbol{X}$$

Nedostatky:
- **definice funkce $g(x)$**
- **stanovení směrné hodnoty P_{target}**
- **definice teoretických modelů pro X**
- **nedostatečný zřetel k následkům poruch**

Základní úloha teorie spolehlivosti 1

Zatížení *E* známé, odolnost *R* náhodná: μ_R, σ_R

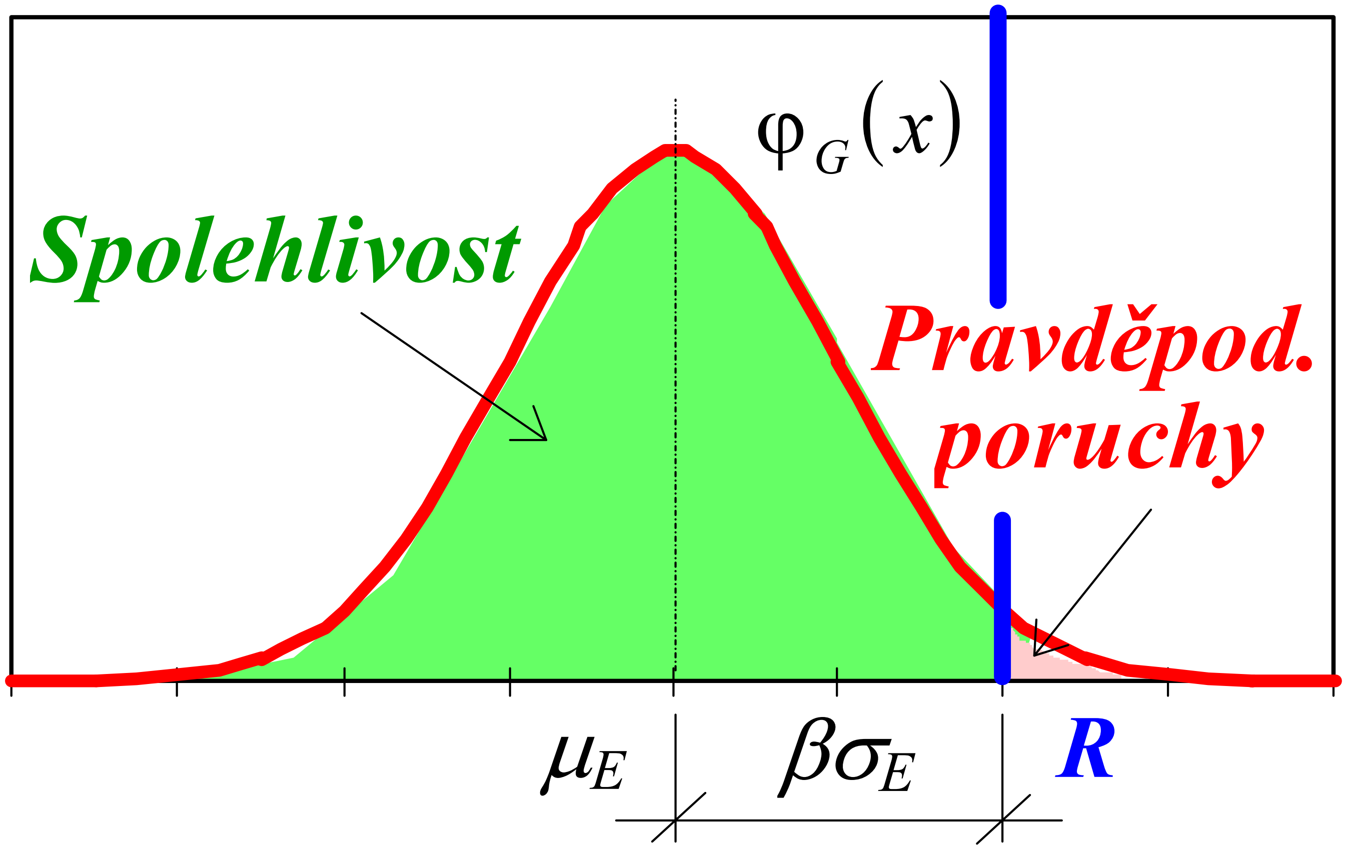
Index spolehlivosti: $\beta = (\mu_R - E) / \sigma_R$



Základní úloha teorie spolehlivosti 2

Zatížení *E* náhodné μ_E, σ_E, odolnost *R* známá

Index spolehlivosti: $\beta = (R - \mu_E) / \sigma_E$

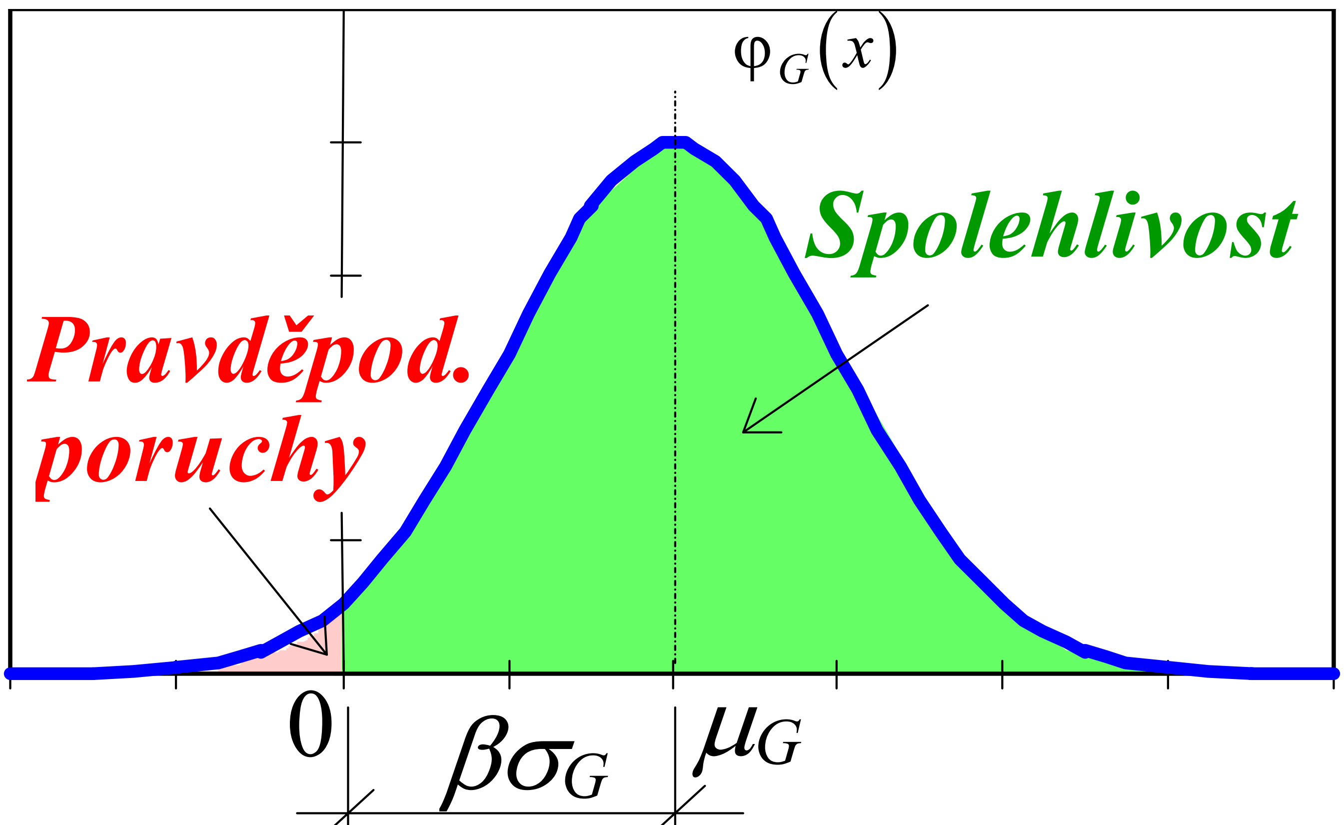


Reserva spolehlivosti: *G = R - E*

$$\mu_G = \mu_R - \mu_E\,,\ \sigma_G^2 = \sigma_R^2 + \sigma_E^2$$

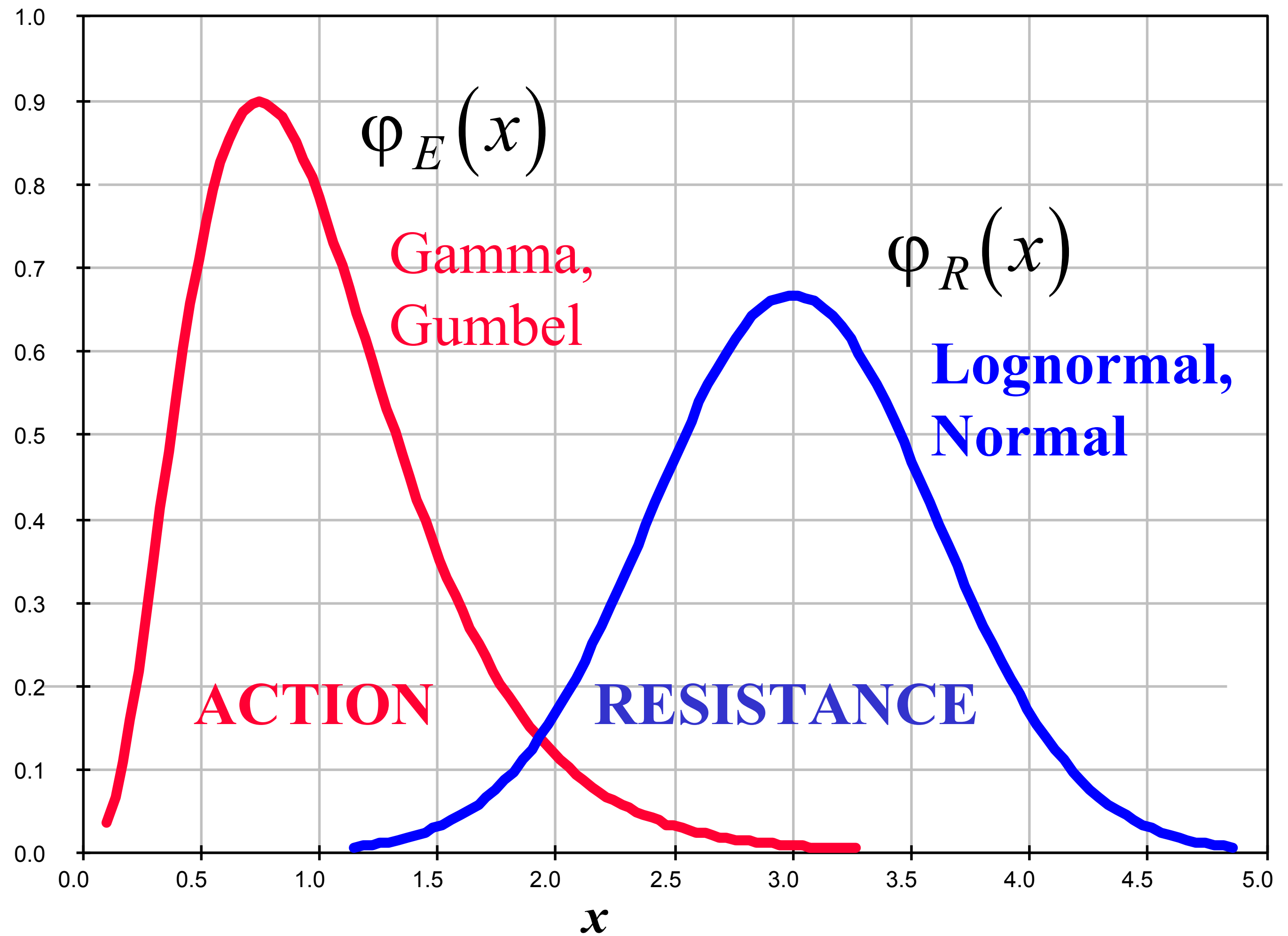
Index spolehlivosti pro normální rozdělení:

$$\beta = \frac{\mu_G}{\sigma_G} = \frac{\mu_R - \mu_E}{(\sigma_R^2 + \sigma_E^2)^{1/2}}$$



Pravděpodobnost poruchy $p_f = P\{E > R\}$

$$p_f = \int \varphi_E(x)\, \Phi_R(x)\, dx$$



Metody výpočtu

Metody výpočtu pravděpodobnosti P_f:

- exaktní analytická metoda (výjimečně)
- numerické metody integrace (pro malý počet základních veličin, MATLAB, MATHCAD)
- přibližné metody (MVFO, FORM, SORM, moments)
- simulační metody (přímé, hrubé, metody Monte Carlo, importance a adaptive sampling)

Softwarové produkty využívají většinou přibližné metody (FORM, SORM) a simulační metody (Monte Carlo)

- VaP (FORM, moments, direct Monte Carlo)
- STRUREL (MVFO, FORM, SORM, Monte Carlo)
  - -- COMREL (COMponent RELiability)
  - -- SYSREL (SYStem RELiability)

Metoda FORM

(1) Transformace základních veličin X na normované náhodné veličiny U

(2) Transformace funkce mezního stavu g(X) na $g_U(U)$

(3) Aproximace funkce $g_U(U)$ tečnou v návrhovém bodě U^*

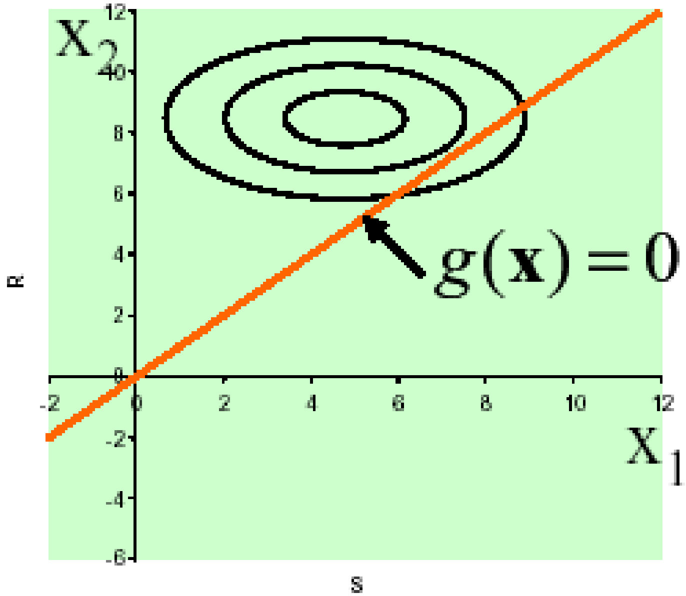
(4) Pravděpodobnost poruchy $P_f = \Phi(-\beta)$, kde β *je* vzdálenost návrhového bodu U^* od počátku.

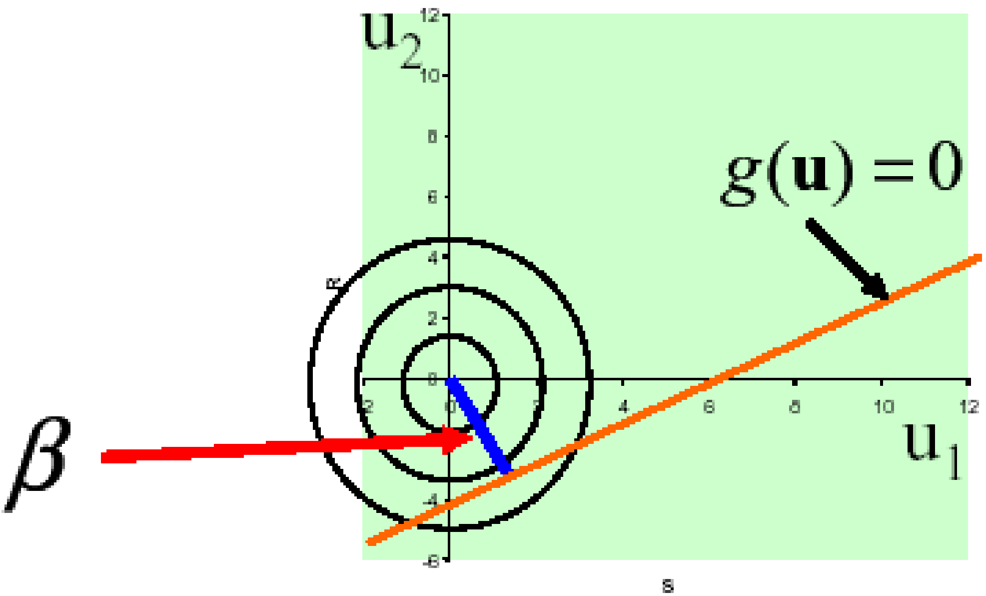
Vliv variability základních veličin X_i na pravděpodobnost poruchy vyjadřují váhové součinitele (směrové kosiny tečné plochy)

$$\alpha_i = \frac{\frac{\partial g(X)}{\partial X_i}\sigma_i}{\sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial g(X)}{\partial X_i}\sigma_i\right)^2}}, \sum_i \alpha_i^2 = 1$$

Aproximativní analytickou metodu FORM lze zpřesnit nahrazením funkce $g_U(U)$ kvadratickou plochou v návrhovém bodě U^* (metoda SORM).

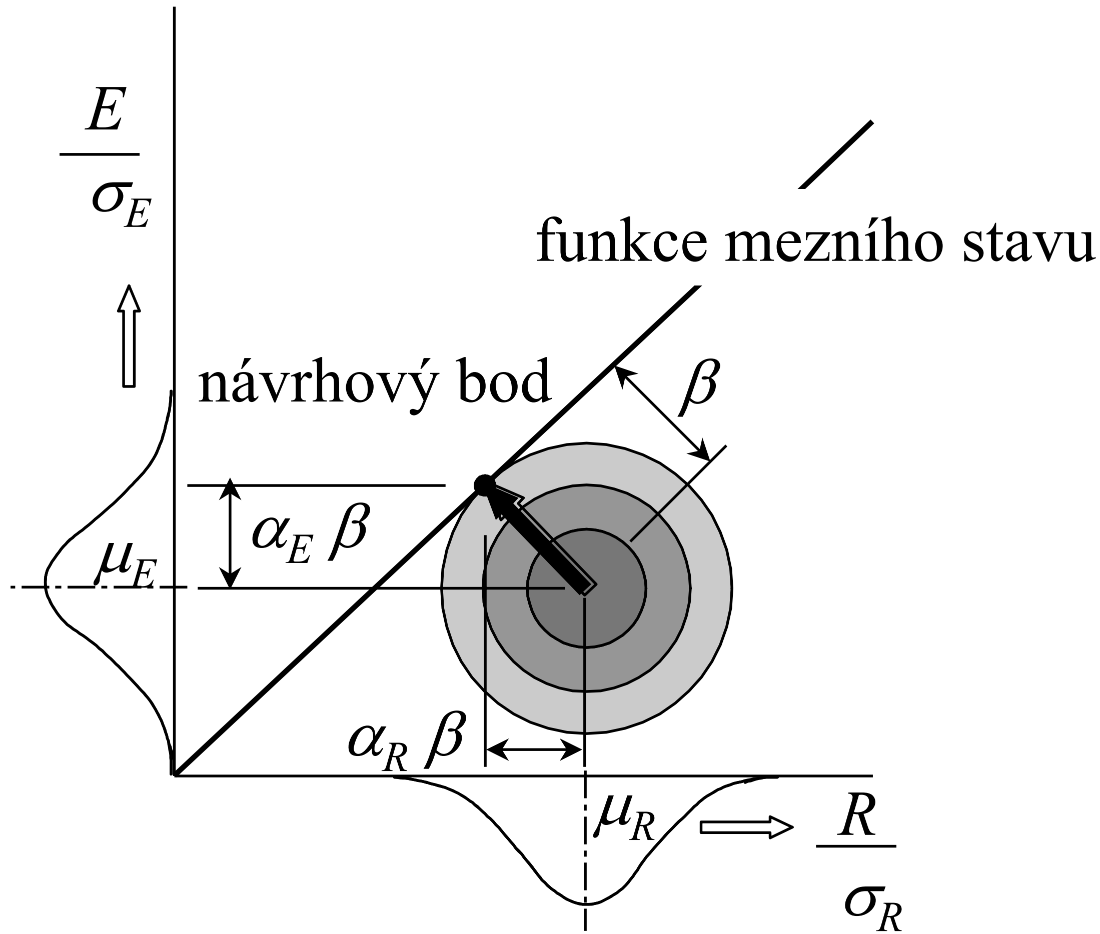
Lineární funkce g(x) a index spolehlivosti β



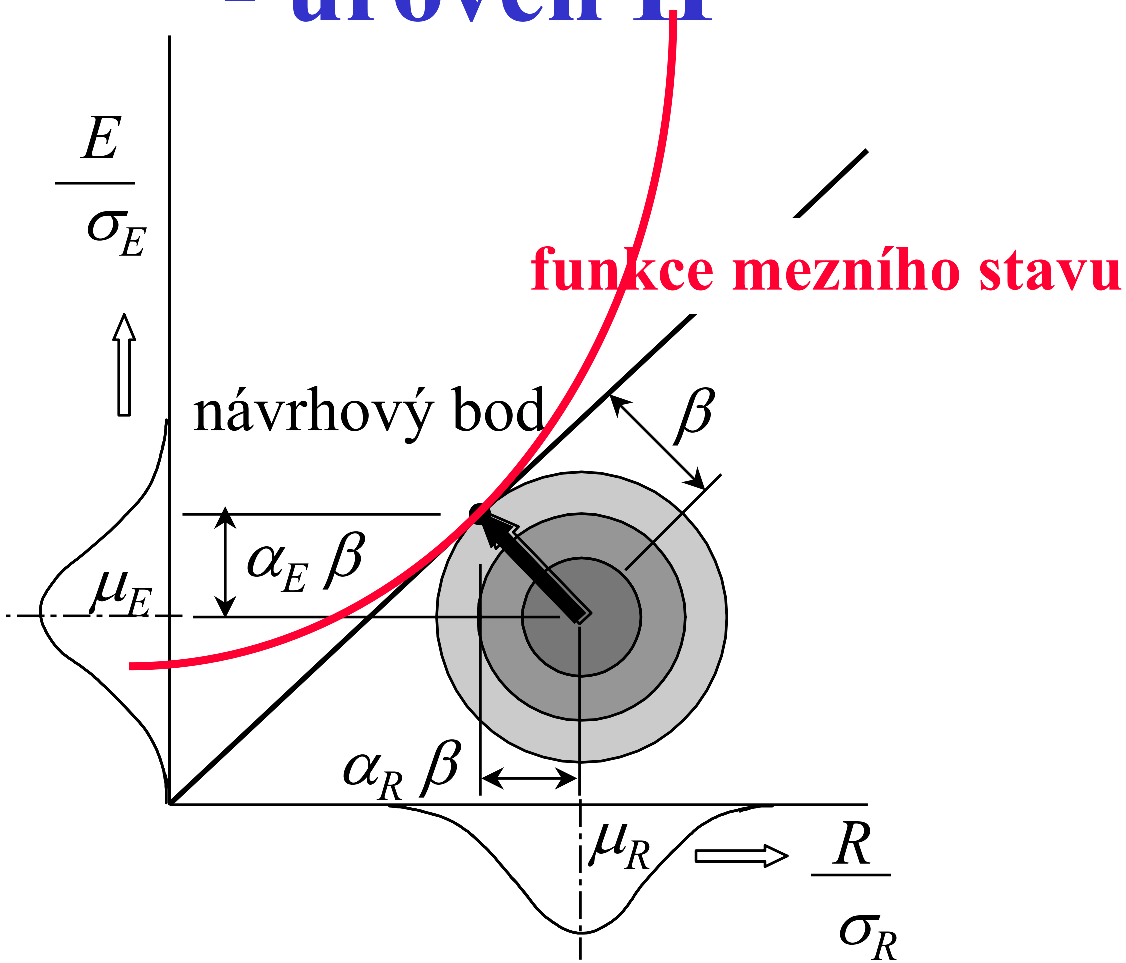


Transformace základních veličin X na normované normální proměnné U

Návrhový bod podle metody FORM - úroveň II

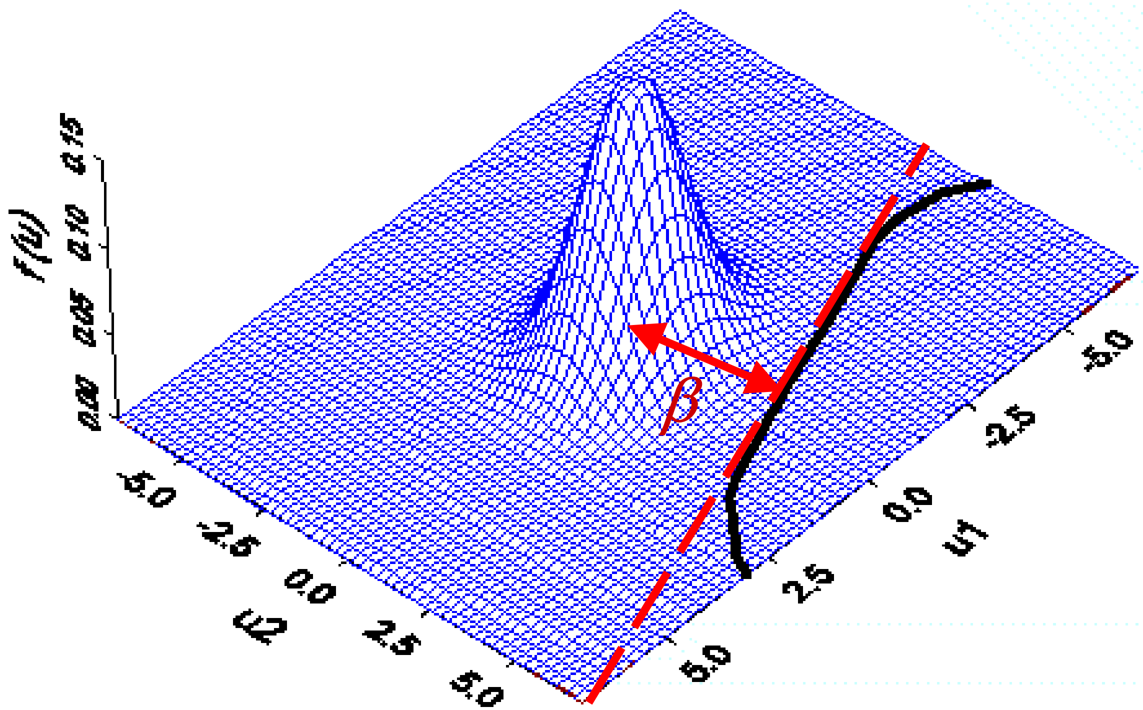


Návrhový bod podle metody FORM - úroveň II

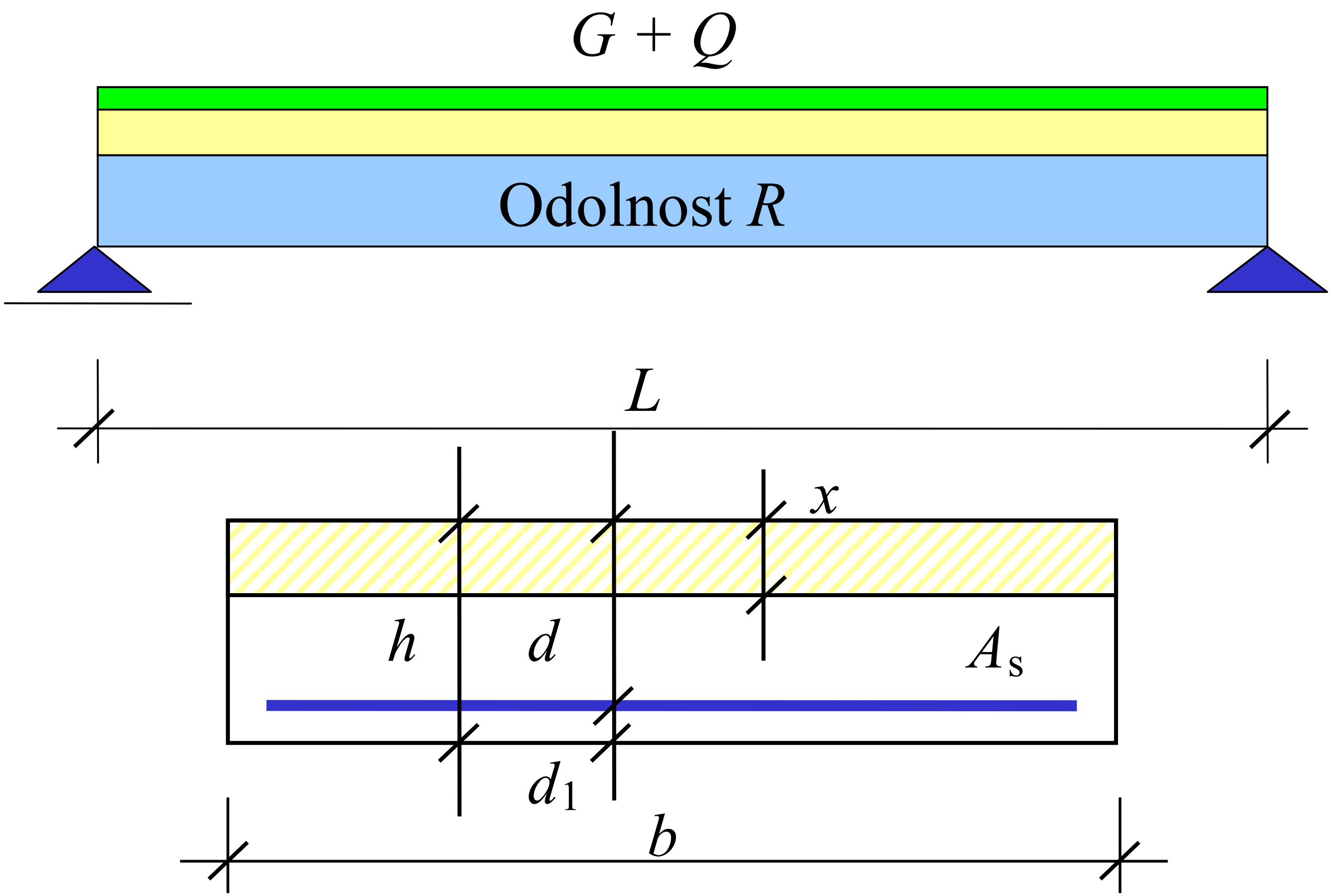


Pravděpodobnost poruchy P_f a index spolehlivosti β

$$\beta = -\Phi_\mathrm{N}^{-1}(P_\mathrm{f}) = \Phi_\mathrm{N}^{-1}(P_\mathrm{s})$$



Příklad - železobetonová deska



$$g\,(X) = R - E = M_R - M_E =$$

$$= \xi_R\, A_s f_y \,(\, h - d_1 - 0{,}5\, A_s f_y \,/\, (b\, f_c)\,)\; - \;\xi_E\,(\, g + q\,)\, L^2 / 8$$

Pravděpodobnostní modely

- **Zatížení: normální, lognormální, gamma, Weibulovo, Gumbelovo**
- **Materiálové vlastnosti: normální, lognormální, Weibulovo**
- **Geometrické údaje: normální, lognormální**

Nedostatek věrohodných dat a nejednotnost teoretických modelů

Základní typy rozdělení

Rozdělení a označení	Hustota pravděpodobnosti	Obor veličiny X	Parametry rozdělení	Průměr μ	Směrodatná odchylka σ	Šikmost α
Rovnoměrné R(a,b)	$1/(b-a)$	$a \le x \le b$	a $b > a$	$(a+b)/2$	$(b-a)/\sqrt{12}$	0
Normální N(μ,σ)	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty \le x \le \infty$	μ σ	μ	σ	0
Lognormální obecné LN(μ,σ,α) LN(μ,σ,x_0)	$\frac{1}{\lvert x-x_0\rvert\sqrt{\ln(1+c^2)}\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\left(\ln\frac{\lvert x-x_0\rvert\lvert c\rvert\sqrt{1+c^2}}{\sigma}\right)^2 \Big/ (2\ln(1+c^2))\right)$	$x_0 \le x < \infty$ pro $\alpha > 0$, $-\infty < x \le x_0$ pro $\alpha < 0$	$x_0 = \mu - c\sigma$ σ c	$x_0 + c\sigma$	σ	$3c+c^3$
Lognormální s dolní mezí v nule LN(μ,σ)	$\frac{1}{x\sqrt{\ln(1+w^2)}\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\left(\ln\frac{x\sqrt{1+w^2}}{\mu}\right)^2 \Big/ (2\ln(1+w^2))\right)$	$0 \le x < \infty$	μ $w = \sigma/\mu$	μ	$w\,\mu$	$3w+w^3$
Gama Gama(μ,σ)	$\lambda^k x^{k-1}\exp(-\lambda x) / \Gamma(k)$	$0 \le x < \infty$	$\lambda = \mu/\sigma^2$ $k = (\mu/\sigma)^2$	k/λ	$\sqrt{k}/\lambda$	$2/\sqrt{k}$
Beta obecné Beta(μ,σ,α,b) Beta(μ,σ,a,b)	$\frac{(x-a)^{c-1}(b-x)^{d-1}}{B(c,d)(b-a)^{c+d-1}}$	$a \le x \le b$	a $b > a$ $c \ge 1$ $d \ge 1$	$a + \frac{(b-a)\,c}{c+d}$	$\frac{(b-a)}{cg+dg}$, $g = \sqrt{\frac{c+d+1}{cd}}$	$\frac{2g(d-c)}{c+d+2}$, $g = \sqrt{\frac{c+d+1}{cd}}$
Beta s dolní mezí v nule Beta(μ,σ,α) Beta(μ,σ,b)	$\frac{(x)^{c-1}(b-x)^{d-1}}{B(c,d)\,b^{c+d-1}}$	$0 \le x \le b$	$b > 0$ $c \ge 1$ $d \ge 1$	$\frac{b\ c}{c+d}$	$\frac{b}{cg+dg}$, $g = \sqrt{\frac{c+d+1}{cd}}$	$\frac{2g(d-c)}{c+d+2}$, $g = \sqrt{\frac{c+d+1}{cd}}$
Gumbelovo Gum(μ,σ)	$\exp(-\exp(-c(x-x_{mod})))$	$-\infty \le x < \infty$	$x_{mod} = \mu - 0{,}577\sqrt{6}\sigma/\pi$ $c = \pi/(\sqrt{6}\sigma)$	$x_{mod} + 0{,}577/c$	$\pi/(\sqrt{6}c)$	1,14

Parametry funkce náhodných veličin

Funkce Z	Průměr μ_Z	Směrodatná odchylka σ_Z	Šikmost α_Z
$aX+b$	$a\mu_X + b$	$\lvert a \rvert \sigma_X$	α_X pro $a > 0$, $-\alpha_X$ pro $a < 0$
X^2 *)	$\mu_X^2 + \sigma_X^2$	$2\sigma_X \left(\mu_X^2 + \mu_X \sigma_X \alpha_X\right)^{1/2}$	$\dfrac{8\,\mu_X^3\,\sigma_X^3\left(\alpha_X + 3\,w_X\right)}{\sigma_Z^3}$
$\dfrac{1}{X}$ *)	$\dfrac{1 + w_X^2 - w_X^3\,\alpha_X}{\mu_X}$	$\dfrac{\left(w_X^2 - 2w_X^3 \alpha_X\right)^{1/2}}{\mu_X}$	$\dfrac{6\,w_X^4 - w_X^3\,\alpha_X}{\mu_X^3\,\sigma_Z^3}$
$aX + bY + c$	$a\mu_X + b\mu_Y + c$	$\left(a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2\right)^{1/2}$	$\dfrac{a^3\,\sigma_X^3\,\alpha_X + b^3\,\sigma_Y^3\,\alpha_Y}{\sigma_Z^3}$
$X + Y$	$\mu_X + \mu_Y$	$\left(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2\right)^{1/2}$	$\dfrac{\sigma_X^3\,\alpha_X + \sigma_Y^3\,\alpha_Y}{\sigma_Z^3}$
$X - Y$	$\mu_X - \mu_Y$	$\left(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2\right)^{1/2}$	$\dfrac{\sigma_X^3\,\alpha_X - \sigma_Y^3\,\alpha_Y}{\sigma_Z^3}$
$X\,Y$ *)	$\mu_X\ \mu_Y$	$\mu_X\,\mu_Y\left(w_X^2 + w_Y^2 + w_X^2\ w_Y^2\right)^{1/2}$	$\dfrac{\mu_X^3\,\mu_Y^3\left(w_X^3\,\alpha_X + w_Y^3\,\alpha_Y + 6w_X^2\ w_Y^2\right)}{\sigma_Z^3}$
$\dfrac{X}{Y}$ *)	$\dfrac{\mu_X\left(1 + w_Y^2 - w_Y^3\,\alpha_Y\right)}{\mu_Y}$	$\dfrac{\mu_X\left(w_X^2 + w_Y^2 - 2\,w_Y^3\,\alpha_Y\right)^{1/2}}{\mu_Y}$	$\dfrac{\mu_X^3\left(w_X^3\,\alpha_X - w_Y^3\,\alpha_Y + 6w_Y^4 + 6w_X^2\,w_Y^2\right)}{\mu_Y^3\,\sigma_Z^3}$

Metoda návrhových bodů

Podmínka $g(X_i) > 0$ se nahrazuje

$$g(x_{di}) = g(x_{d1}, x_{d2}, x_{d3}, \ldots) > 0$$

kde návrhový bod x_{di} základní veličiny X_i se stanoví:

pro libovolné rozdělení

$$\Phi_{Xi}(x_{di}) = \Phi(-\alpha_i \beta)$$

pro normální rozdělení

$$x_{di} = \mu_i(1 - \alpha_i \beta V_i)$$

pro lognormální rozdělení

$$x_{di} = (\mu_i / \sqrt{(1+V_i^2)}) \exp(-\alpha_i \beta \sqrt{\ln(1+V_i^2)}) \cong \mu_i \exp(-\alpha_i \beta V_i)$$

Normované součinitele α_i

	X_i	α_i
Odolnost:	**Dominantní odolnost**	**0,8**
	Ostatní	**0,32=0,4 ×0,8**
Zatížení:	**Dominantní zatížení**	**–0,7**
	Ostatní	**–0,27= – 0,4×0,7**

Příklad: Pro funkci g(X) = R – E a normální R a E, podmínka

g(x_{d1}, x_{d2} , x_{d3}, ...) > 0 zní

$$\mu_R(1-\alpha_R\beta V_R) - \mu_E(1-\alpha_E\beta V_E) > 0$$

Pro $\beta = 3{,}8$

$$\mu_R(1-\ 3{,}04V_R) - \mu_E(1+2{,}66V_E) > 0$$

Pro $V_R = 0{,}1$ a $V_R = 0{,}3$ vychází podmínka pro průměry

$$\mu_R > \mu_E(1{,}8/0{,}7) \cong 2{,}6\ \mu_E$$

Zjednodušené pravděpodobnostní pojetí spolehlivosti v Eurokódech

- **Index spolehlivosti** $\beta = \dfrac{\mu_G}{\sigma_G} = \dfrac{\mu_R - \mu_E}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}}$

- **Návrhové hodn.** $R_\mathrm{d} = \mu_R - \beta\alpha_R\sigma_R\,, E_\mathrm{d} = \mu_E - \beta\alpha_E\sigma_E$

- **Váhové součinitele**
a aproximace v EC

$$\alpha_R = \frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}} \approx 0.8$$

$$\alpha_E = -\frac{\sigma_E}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}} \approx -0.7$$

Metoda návrhových bodů pro *E*<*R*

$$E_\mathrm{d} \le R_\mathrm{d}, \quad \text{pro } \beta = \frac{\mu_R - \mu_E}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}}$$

$$E_\mathrm{d} = \mu_E - \alpha_E \, \beta \, \sigma_E \qquad R_\mathrm{d} = \mu_R - \alpha_R \, \beta \, \sigma_R$$

$$E_\mathrm{d} = R_\mathrm{d} \Rightarrow \beta = \frac{\mu_R - \mu_E}{\alpha_R \sigma_R - \alpha_E \sigma_E}$$

Váhové součinitele:

$$\alpha_R = \frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}}, \quad \alpha_E = -\frac{\sigma_E}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}}$$

Dílčí součinitele

$$E_{\mathrm{d}} = \gamma_E \, E_{\mathrm{k}}, \quad R_{\mathrm{d}} = \frac{R_{\mathrm{k}}}{\gamma_R}$$

$$E_{\mathrm{d}} = \mu_E - \alpha_E \, \beta \, \sigma_E \qquad R_{\mathrm{d}} = \mu_R - \alpha_R \, \beta \, \sigma_R$$

$$\gamma_E = \frac{E_{\mathrm{d}}}{E_{\mathrm{k}}} = \frac{\mu_E - \alpha_E \, \beta \, \sigma_E}{\mu_E + u_p \sigma_E}, \gamma_R = \frac{R_{\mathrm{k}}}{R_{\mathrm{d}}} = \frac{\mu_R + u_p \, \sigma_R}{\mu_R - \alpha_R \, \beta \, \sigma_R}$$

EN 1990 pro dominantní: $\alpha_E = -0{,}7$; $\alpha_R = 0{,}8$

pro nedominantní: $-\alpha_E = \alpha_R = 0{,}4$

Dílčí součinitele pro odolnost R

$$\gamma_R = \frac{R_\mathrm{k}}{R_\mathrm{d}} = \frac{\mu_R + u_p\,\sigma_R}{\mu_R - \alpha_R\,\beta\,\sigma_R} = \frac{1-1{,}645\times V_R}{1-0{,}8\times 3{,}8\times V_R}$$

w_R	**0**	**0,05**	**0,1**	**0,15**	**0,20**
γ_R	**1,0**	**1,08**	**1,20**	**1,38**	**1,71**

Dílčí součinitele pro stálé zatížení G

$$\boldsymbol{G_{\mathrm{d}} = \gamma_G G_{\mathrm{k}}, \quad G_{\mathrm{k}} = \mu_G}$$

$$\gamma_G = \frac{G_{\mathrm{d}}}{G_{\mathrm{k}}} = \frac{\mu_G - \alpha_E \beta \sigma_G}{\mu_G} = 1 + 0{,}7 \times 3{,}8 \times w_G$$

w_G	0	0,05	0,1	0,15
γ_G	1,0	1,13	1,27	1,40

Dílčí součinitele spolehlivosti - úroveň I

- **Zatížení - návrhové veličiny** $F_{\mathrm{d}} = \gamma_F F_{\mathrm{k}}$
- **Vlastnosti materiálů - n. v.** $f_{\mathrm{d}} = f_{\mathrm{k}} / \gamma_f$
- **Rozměry - náhodné veličiny** $a_{\mathrm{d}} = a_{\mathrm{k}} \pm \Delta a$

$$E_{\mathrm{d}}(F_{\mathrm{d}}, f_{\mathrm{d}}, a_{\mathrm{d}}) < R_{\mathrm{d}}(F_{\mathrm{d}}, f_{\mathrm{d}}, a_{\mathrm{d}})$$

$$\langle E_{\mathrm{d}} \rangle = \mu_E + 0.7\beta\sigma_E, \langle R_{\mathrm{d}} \rangle = \mu_R - 0.8\beta\sigma_R$$

- **Nedostatky**

  - rozdílné pravděpodobnosti poruchy nosných prvků z různých materiálů

  - nedostatek representativních dat

Návrhové hodnoty E_d a R_d

DOMINANTNÍ VELIČINY

$$P\{E > E_\mathrm{d}\} = \Phi(+\alpha_E \beta) = \Phi(-0{,}7\beta) = \Phi(-2{,}66) = 0{,}00391$$

$$P\{R < R_\mathrm{d}\} = \Phi(-\alpha_R \beta) = \Phi(-0{,}8\beta) = \Phi(-3{,}04) = \boxed{0{,}00118}$$

NEDOMINANTNÍ VELIČINY

$$P\{E > E_\mathrm{d}\} = \Phi(+0{,}4\alpha_E \beta) = \Phi(-0{,}28\beta) = \Phi(-1{,}064) = 0{,}143$$

$$P\{R < R_\mathrm{d}\} = \Phi(-0{,}4\alpha_R \beta) = \Phi(-0{,}32\beta) = \Phi(-1{,}216) \boxed{= 0{,}112}$$

Odolnost v Eurokódech

$$R_{\mathrm{d}} = R\left\{ X_{\mathrm{k}} / \gamma_{\mathrm{M}}, a_{\mathrm{nom}} \right\}$$

ENV 1992 a 1995

$$R_{\mathrm{d}} = \frac{1}{\gamma_R} R\left\{ X_{\mathrm{k}}, a_{\mathrm{nom}} \right\}$$

ENV 1993

$$R_{\mathrm{d}} = \frac{1}{\gamma_{R\mathrm{d}}} R\left\{ X_{\mathrm{k}} / \gamma_{\mathrm{m}}, a_{\mathrm{nom}} \right\}$$

ENV 1994

Závěry

- **Metoda dílčích součinitelů je nejdokonalejší operativní metoda navrhování**
- **Dosud je spolehlivost konstrukcí značně nevyrovnaná**
- **Pravděpodobnostní metody vytvářejí předpoklady pro porovnávání a zobecnění**
- **Další kalibrace součinitelů materiálu a zatížení a dalších prvků spolehlivosti je žádoucí**
- **Ve zvláštních případech je možno aplikovat pravděpodobnostní postupy přímo**