PRAVDĚPODOBNOST A MATEMATICKÁ STATISTIKA

Základní pojmy a definice

- Pravděpodobnost
- Statistické charakteristiky
- Kvantil
- Příklady

Pravděpodobnost

- Náhodný jev *A*, *B*, jev jistý *U*, nemožný *V*
- Soubor podmínek γ při realizaci pokusů
- Klasické definice: $p = n(A)/n(U)$
- Geometrická definice: $p = A/U$
- Axiomatická definitice: $p = \mathrm{P}(A)$

$$\mathrm{P}(A_i) \geq 0, \mathrm{P}(U) = 1, \mathrm{P}(\bigcup A_i) = \sum \mathrm{P}(A_i)$$

- Podmíněná pravděpodobnost

$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A \cdot B) / \mathrm{P}(B)$$

- Nezávislé jevy *A* a *B*

$$\mathrm{P}(A \cdot B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$$

Pravidla pro výpočet

- Pravděpodobnost doplňkového jevu

$$\mathrm{P}(nonA)=1-\mathrm{P}(A)$$

- Pravděpodobnost sjednocení (A_i disjunktní)

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(\cup \mathrm{A}_{\mathrm{i}}) = \sum \mathrm{P}(A_i)$$

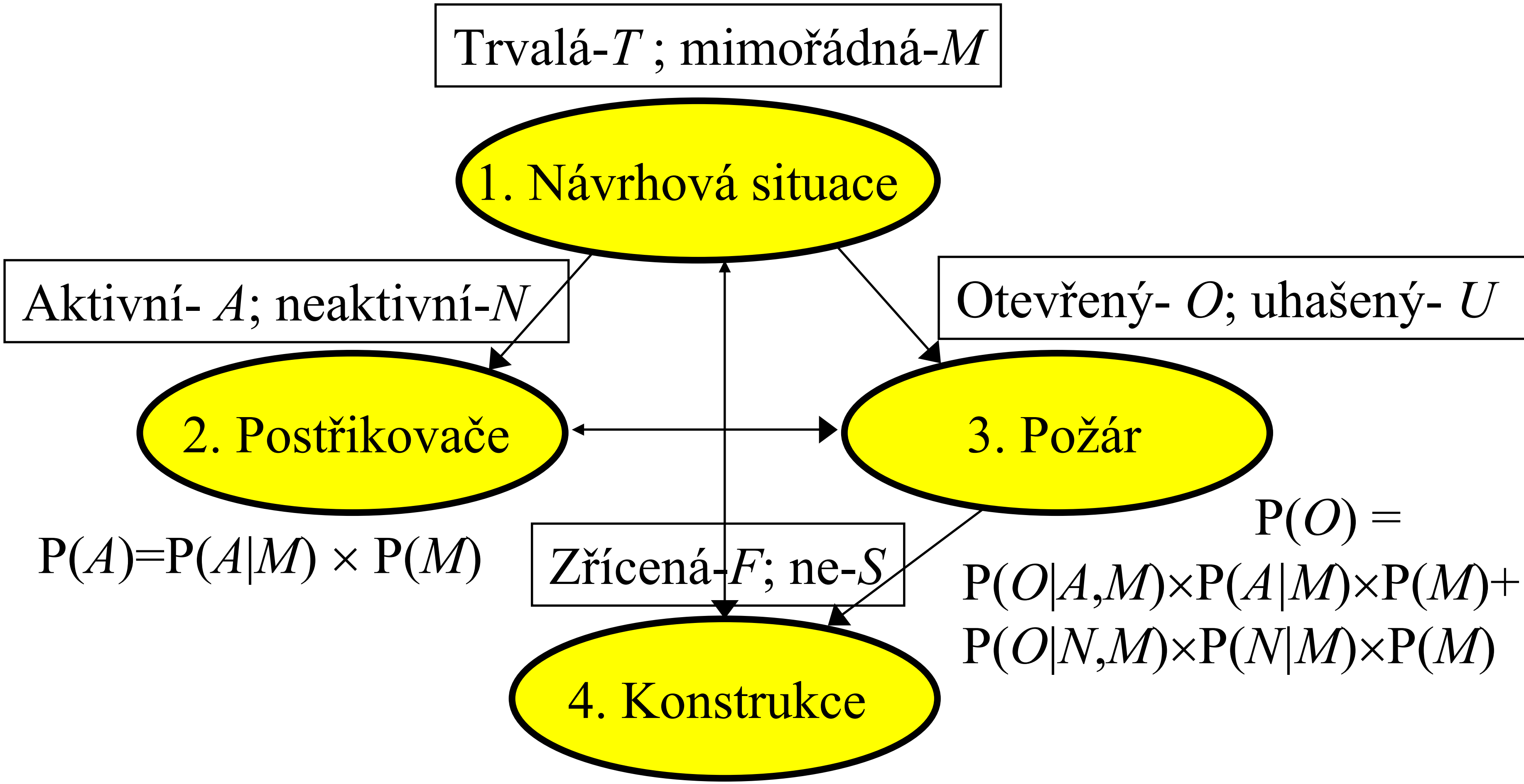
- Věta o úplné pravděpodobnosti (B_i disjunktní)

$$\mathrm{P}(A) = \sum \mathrm{P}(B_{\mathrm{i}})\mathrm{P}(A|B_i)$$

- Bayesova věta (B_i disjunktní)

$$\mathrm{P}(B_i \mid A) = \frac{\mathrm{P}(B_i)\mathrm{P}(A \mid B_i)}{\sum \mathrm{P}(B_i)\mathrm{P}(A \mid B_i)}$$

Konstrukce při požáru

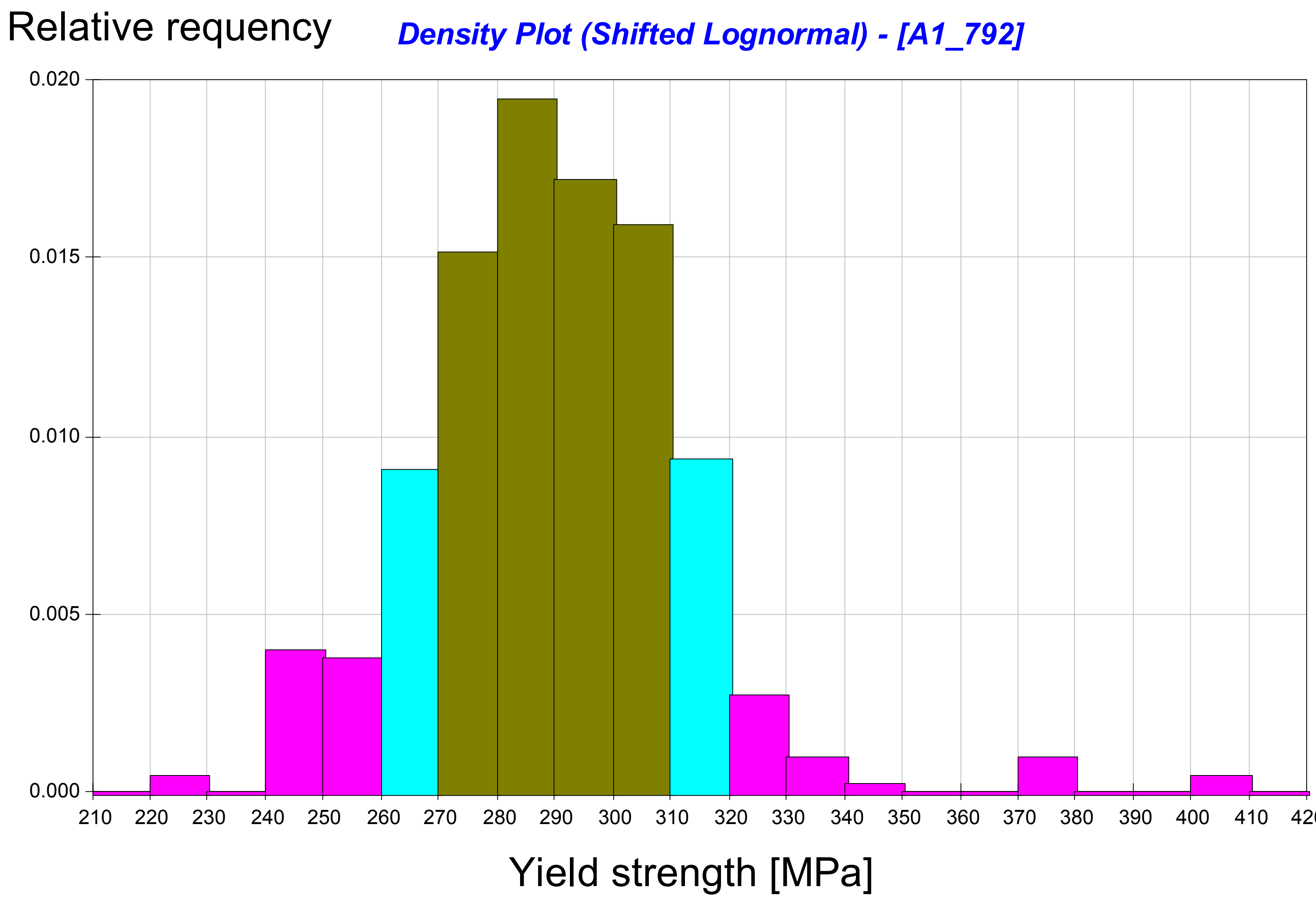


$$P(A)=P(A|M) \times P(M)$$

$$P(O) = P(O|A,M)\times P(A|M)\times P(M)+ P(O|N,M)\times P(N|M)\times P(M)$$

$$P(F)=P(F|T)\times P(T)+P(F|O,M)\times P(O|M)\times P(M)+P(F|U,M)\times P(U|M)\times P(M)$$

Mez kluzu pro ocel S235 - 792 tests



Statistické charakteristiky

Souborové hodnoty **Nestranné odhady**

• Průměr, míra polohy

$$m'_X = m_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)$$

• Směrodatná odchylka, míra rozptylu

$$s'_X = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_X\right)^2}, \qquad s_X = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_X\right)^2}$$

• Koeficient šikmosti, míra asymetrie

$$a'_X = \frac{1}{n s_X^3}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_X\right)^3, \quad a_X = \frac{n}{(n-1)(n-2)s_X^3}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_X\right)^3$$

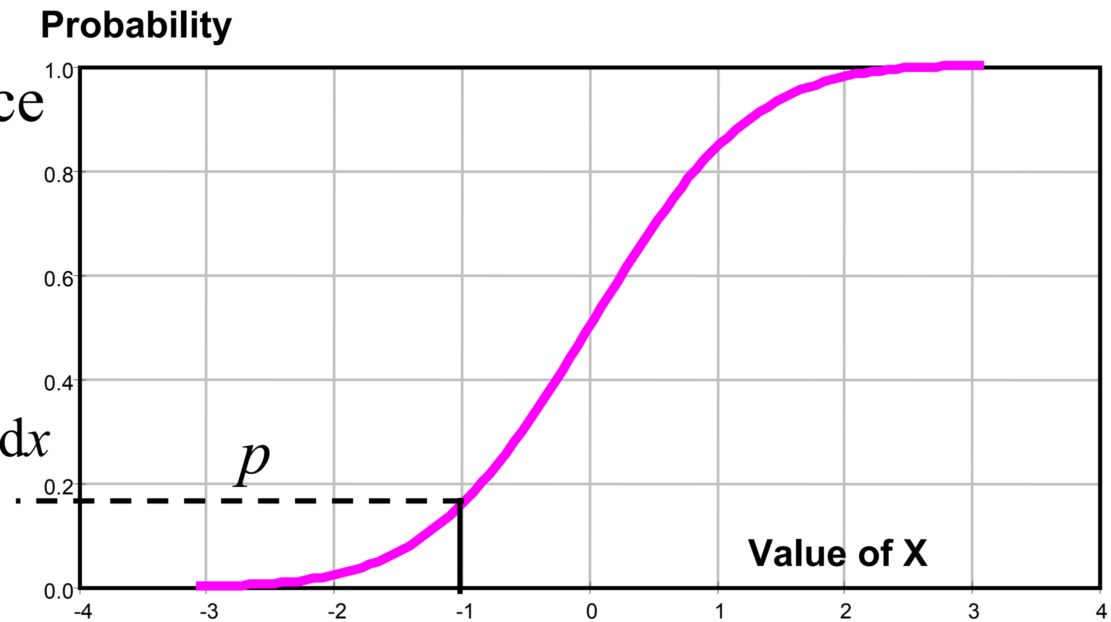
• Variační koeficient, relativní míra rozptylu

$$v'_X = s'_X / m'_X, \qquad v_X = s_X / m_X$$

TEORETICKÝ MODEL SPOJITÉ VELIČINY

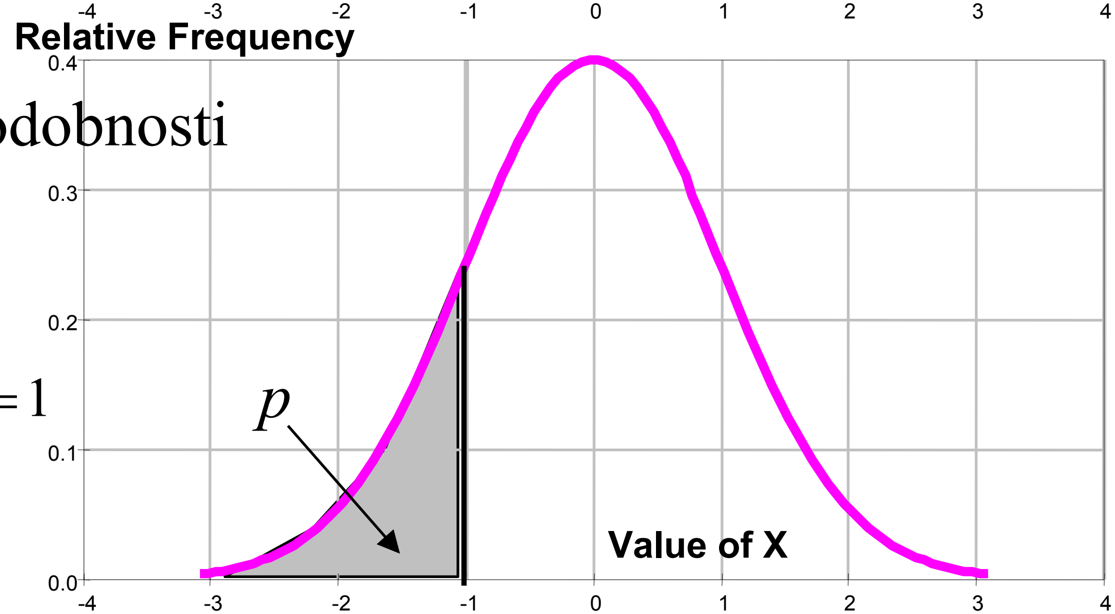
Distribuční funkce
$\Phi(x)$

$$p = P\{X < x\} = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

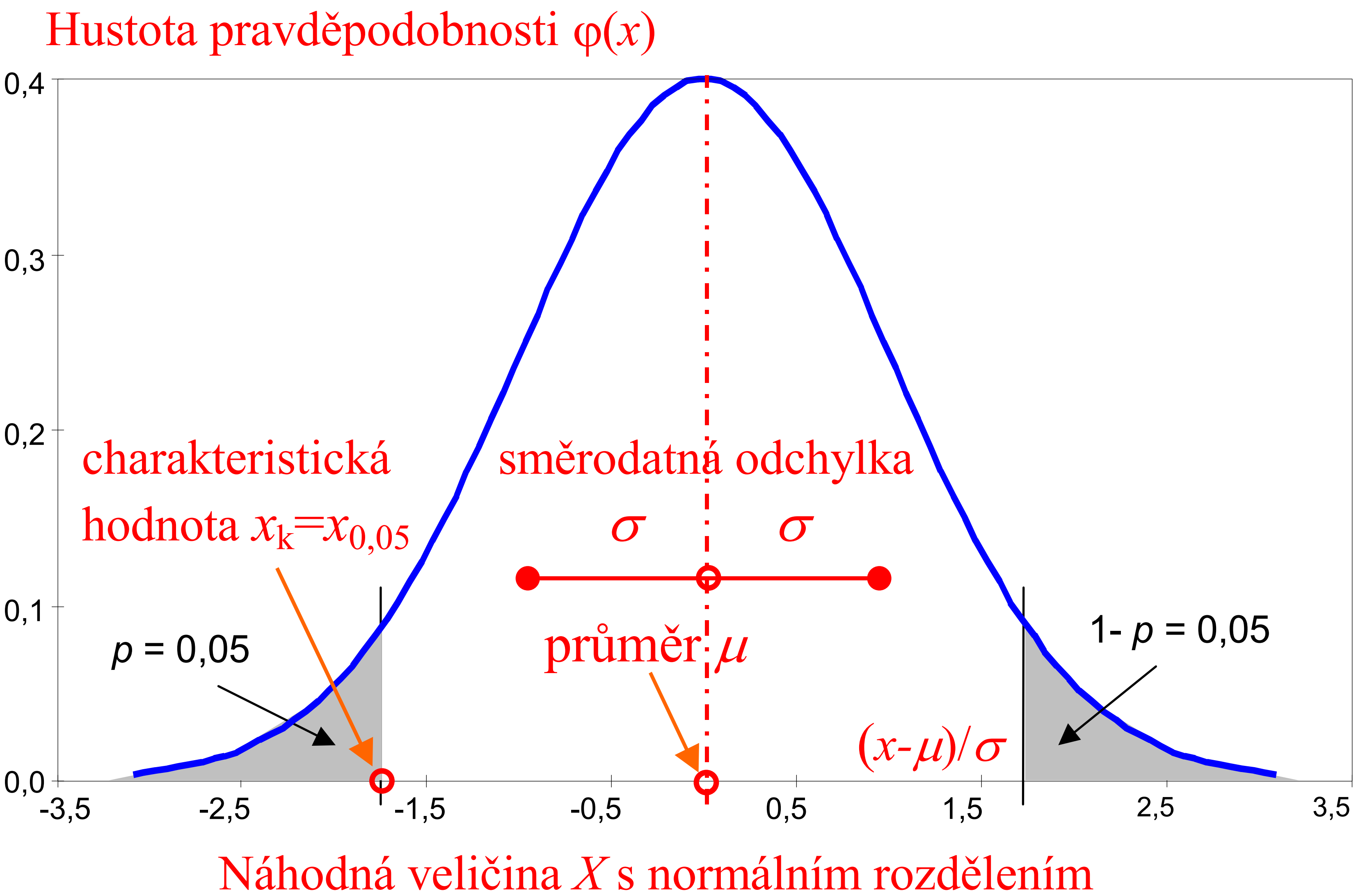


Hustota pravděpodobnosti
$\varphi(x) = \partial\Phi(x)/\partial x$

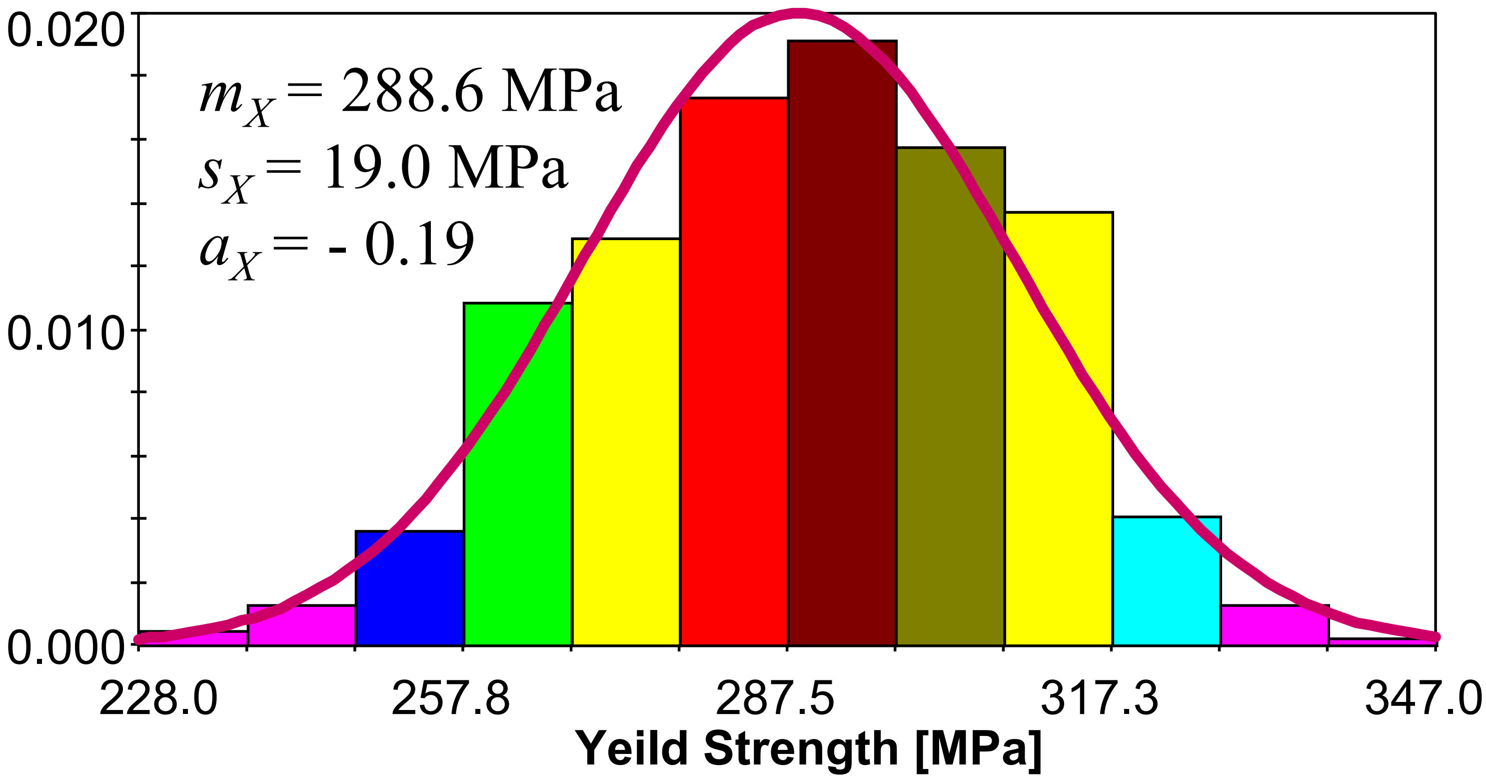
$$P\{X < x\} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$$



TEORETICKÝ MODEL



Normal (Gauss) distribution - S235 (780 tests)

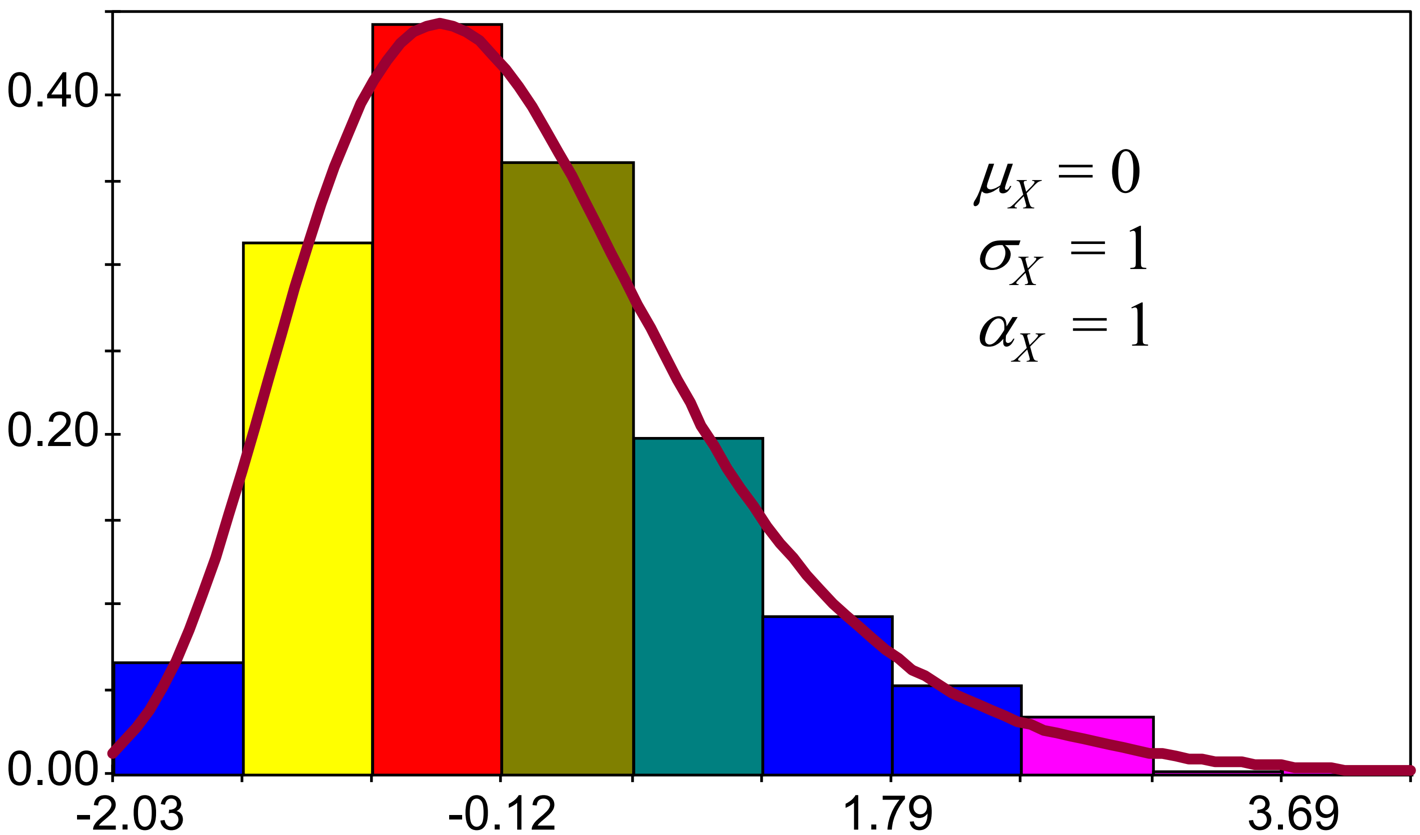


$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X} \right]$$

Standardised variable

$$U = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}, \; \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{u^2}{2} \right]$$

Shifted Lognormal



Lognormal X, normal Y: $Y = \ln|X - x_0|$

$x_0 = \mu_X - \sigma_X / c$ where $\alpha_X = c^3 + 3c$

Kvantil

KVANTIL: x_p **- pravděpodobnost** p **(~ 0,001; 0,05; ~ 0,10):**

$$P\{X < x_p\} = p$$

POKRYVNÁ METODA: $x_{\mathrm{p,covr}}$ **- confidence level** γ **:**

$$P\{x_{\mathrm{p,covr}} < x_p\} = \gamma$$

PŘEDPOVĚDNÍ METODA: $x_{p,pred}$ **- pravděpodobnost** p **výskytu příští hodnoty** $x_{\mathrm{n+1}}$ **:**

$$P\{x_{\mathrm{n+1}} < x_{p,pred}\} = p$$

BAYESOVSKÝ PŘÍSTUP: kombinace pozorovaných datdata (s průměrem m **a směrodatnou odchylkou** s**) a předchozích dat (**m'**,** s'**) pro kterou se stanoví výsledné charakteristiky (**m''**,** s''**) - pak se aplikuje pokryvná nebo předpovědní metoda**

Odhad kvantilu

CHARAKTERISTICKÁ PEVNOST $f_k = 5\ \%$ KVANTIL

- f_k= PRŮMĚR - k x SMĚRODATNÁ ODCHULKA
- Teoretický model: $f_k = \mu_X - k_1\ \sigma_X$
- Soubor: $f_k = m_X - k_2\, s_X$ nebo $f_k = m_X - k_3\ \sigma_X$
- k SOUČINITEL SMĚRODATNÉ ODCHYLKY ZÁVISÍ NA

  - rozměru souboru
  - předchozí informci
  - asymetrii
  - konfidenci

Bayesovské pojetí

Kombinace dvou souborů o rozsahu n a n'

$$n'' = n + n'$$

$$\nu'' = \nu + \nu' + 1, \text{ kde } n' \geq 1. \quad \nu'' = \nu + \nu', \text{ when } n' = 0$$

$$m'' = (m\,n + m'n') / n''$$

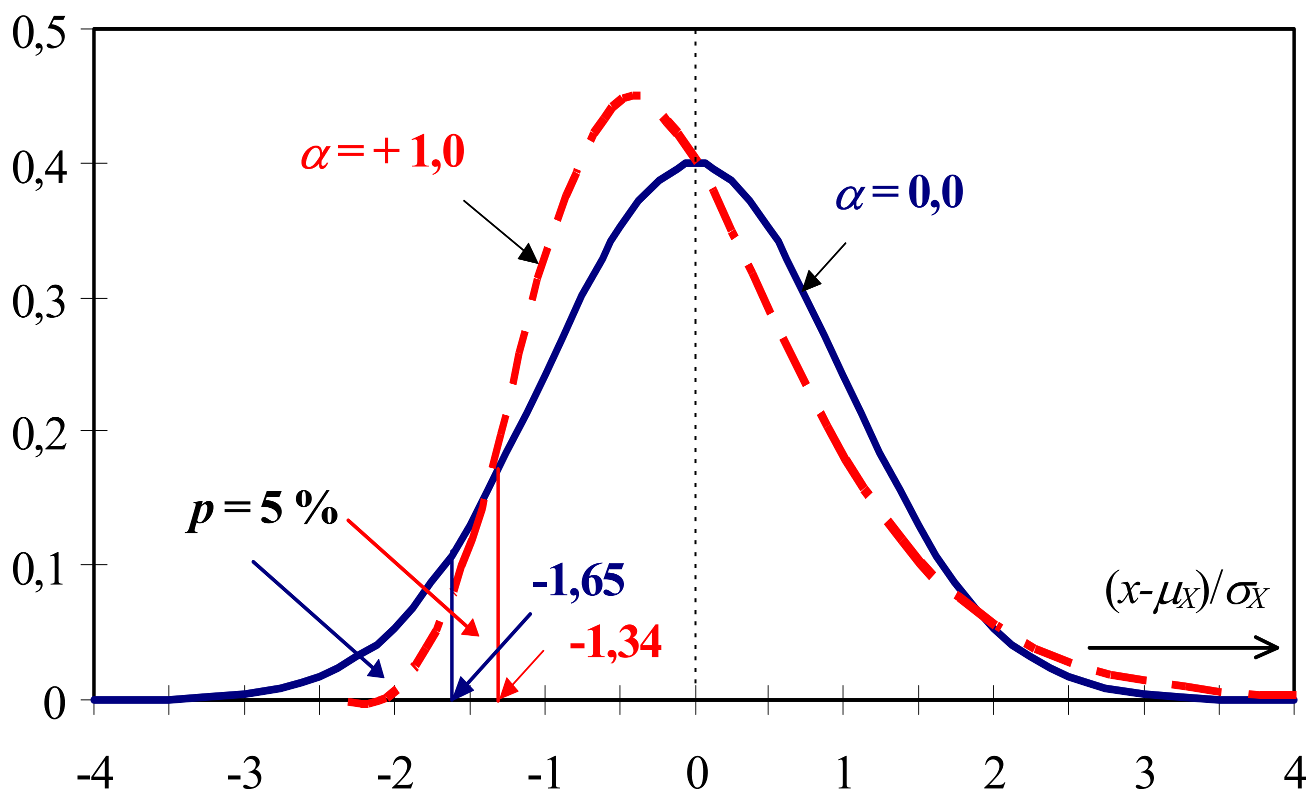
$$s''^2 = (\nu s^2 + \nu' s'^2 + n\,m^2 + n'm'^2 - n''m''^2) / \nu''$$

kde $n = n$ -1, neznámé n' a n' lze odhadnout z variačních koeficientů $V(m')$ a $V(s')$:

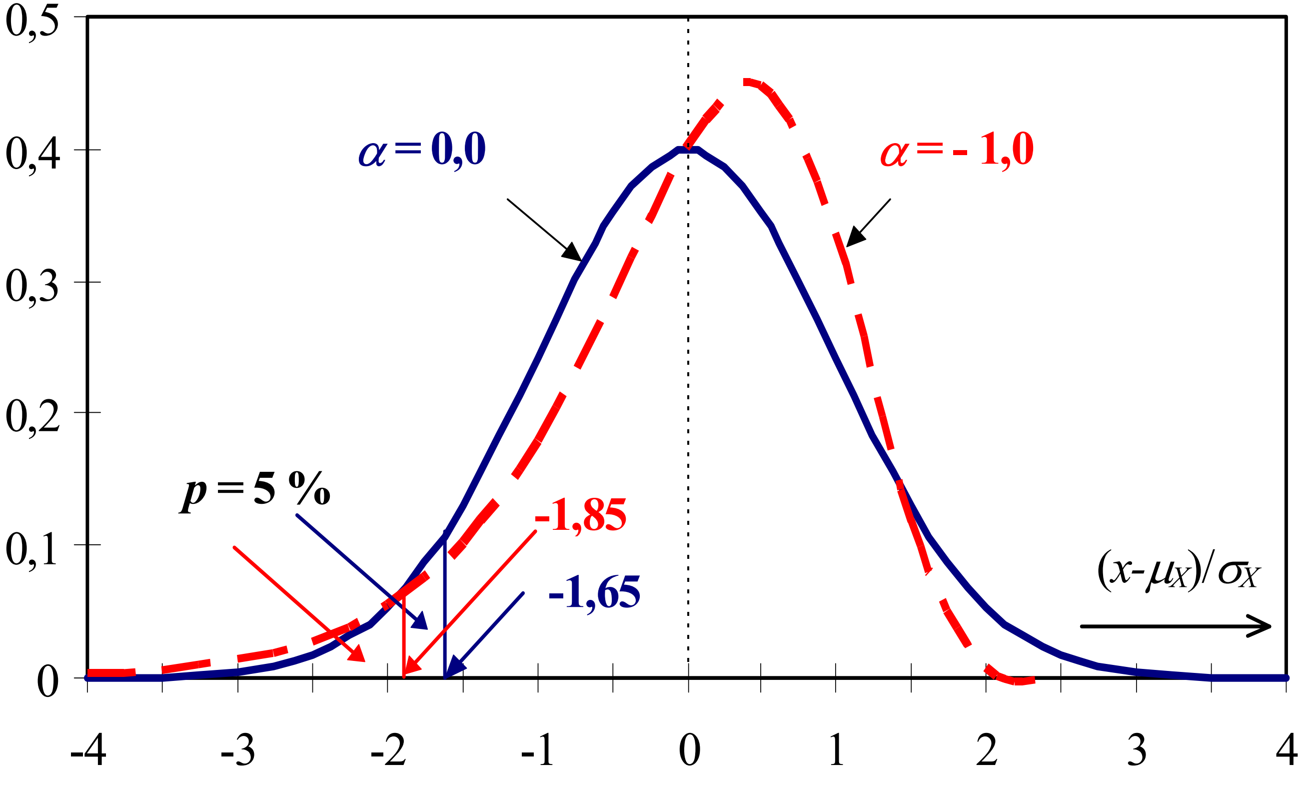
$$n' = [s' / (m' V(m'))]^2, \quad \nu' = 0.5 / [V(s')]^2$$

n' a ν' jsou navzájem nezávislé (neplatí $\nu' = n'$-1)

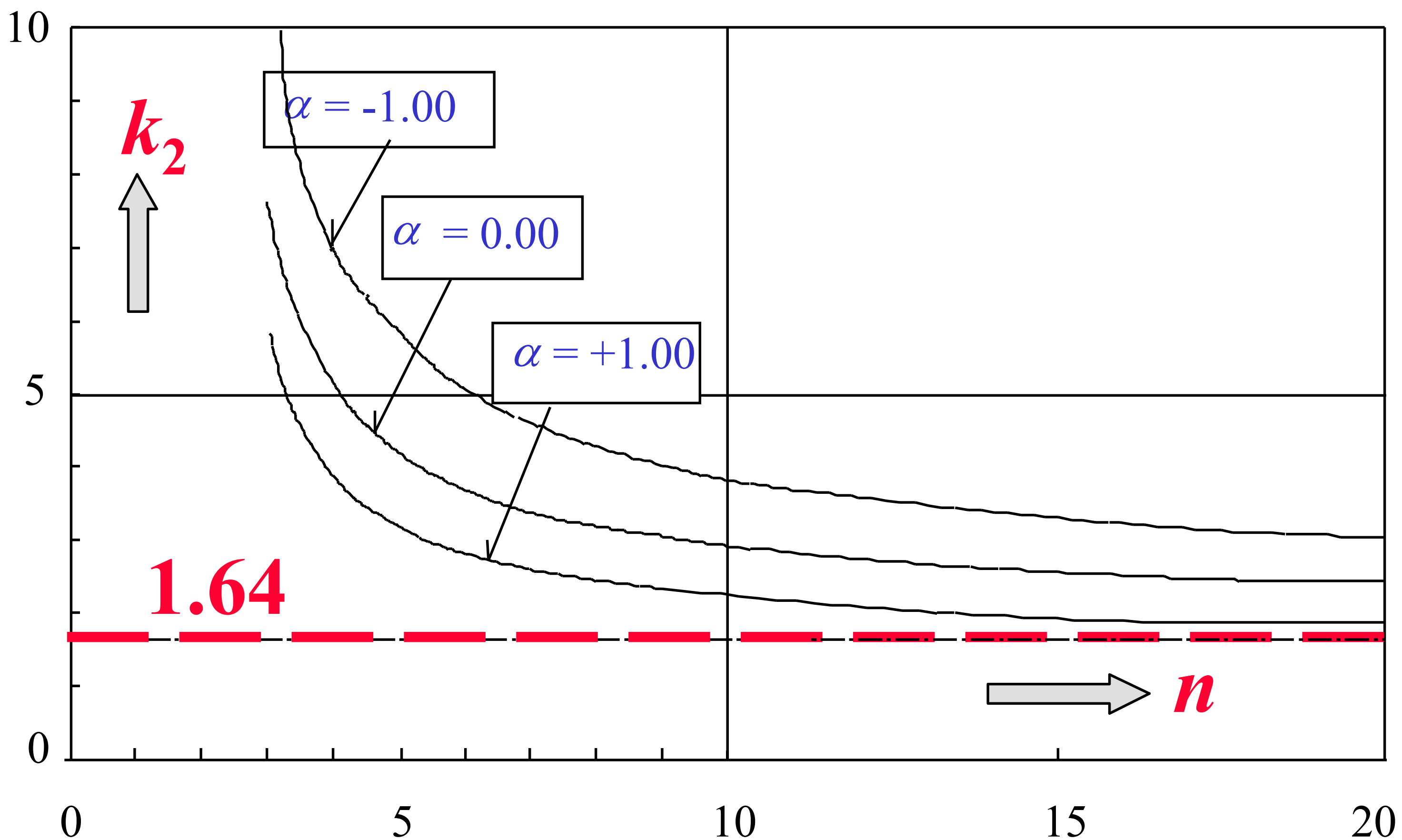
POSITIVE SKEWNESS



NEGATIVE SKEWNESS



Coefficient *k* used in fractile assessment: $f_k = m_X - k_2 \times s_X$



p=0.05 γ= 0.95